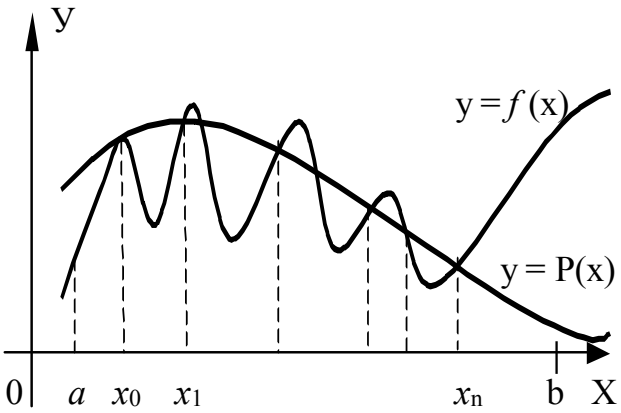
А.Д.Дементьев, М.В.Грунина,
В.Н.Бабин, В.Г.Шефель

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ



Новосибирск 2003

Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Новосибирский государственный аграрный университет

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших сельскохозяйственных учебных заведений по агроинженерным и агроэкономическим специальностям

Новосибирск 2003

УДК.519.6
ББК 22.18
Д – 302
Авторы: доктор физ.-мат. наук, профессор А.Д.Дементьев,
доцент М.В.Грунина, доцент В.Н.Бабин, доцент В.Г.Шефель.

Применение вычислительных методов/ Новосиб.гос.аграр.ун-т.
Авт. А.Д.Дементьев, М.В.Грунина, В.Н.Бабин, В.Г.Шефель,-
Новосибирск, 2003. – 273 стр.

Учебное пособие содержит теоретические сведения по численному интегрированию, интерполяции, решению нелинейных уравнений, прямым и итерационным методам решения систем линейных алгебраических уравнений, методам решения задачи Коши и методам обработки экспериментальных данных. Теория численных методов сопровождается большим количеством задач, приводимых с решениями. Представлены задачи для самостоятельной работы и 31 вариантом для проведения контрольных работ.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной формам обучения, аспирантов и научных сотрудников, использующих численные методы.

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших сельскохозяйственных учебных заведений по агроинженерным и агроэкономическим специальностям

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук Л.А.Назаров
доктор физ.-мат. наук Л.А.Назарова

ISBN 5-94477-024-4

© А.Д. Дементьев, М.В. Грунина, В.Н. Бабин, В.Г. Шефель

ГЛАВА 1

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

§ 1. Точные и приближенные значения величин.

В практической деятельности приходится иметь дело со значениями различных величин: длин, площадей, масс, скоростей и т.д. Числовые значения величин можно получить в результате их измерения, подсчета. Однако истинное (точное) значение величины удается определить лишь в некоторых случаях (например, при подсчете конечного множества каких-либо предметов). В результате счета можно получить или точное, или приближенное значение величины. При этом достаточным признаком приближенности результата счета является наличие разных ответов при повторных подсчетах.

Результат измерения всегда дает приближенное значение величины. Это связано с неточностью самих измерений, неидеальной точностью измерительных приборов. Приближенные значения величин получаются также при округлении чисел. Например, число π = 3,14159… (3,14 – приближенное значение π, взятое с недостатком).

Пусть в результате взвешивания какой-либо детали найдено, что ее масса m меньше 30г, но больше 20г.

Следовательно, $20 < m < 30$. Числа 20 и 30 соответствуют приближенному значению массы детали, взятому соответственно с недостатком и с избытком. Таким образом, установлены границы значения массы в граммах: 20 – нижняя, а 30 – верхняя граница.

Если известны границы значения некоторой величины, то можно оценить значение другой величины, зависящей от первой.

Пример 1.Пусть $3 < x < 6$, где x- значение некоторой величины. Требуется оценить значение величины $1/x$.

Решение.

Из условия следует, что $x > 0$; так как $1/x < 1/3$ и $1/x > 1/6$, то $1/6 < 1/x < 1/3$.

Заменим границы значения выражения $1/x$ десятичными дробями: $1/6 = 0{,}1666\ldots \approx 0{,}1$ (приближенное значение, взятое с недостатком); $1/3 = 0{,}333\ldots \approx 0{,}4$ (приближенное значение, взятое с избытком). Итак, $0{,}1 < 1/x < 0{,}4$.

Замечание. Нижнюю границу можно заменить только меньшим числом (приближение с недостатком), а верхнюю только большим числом (приближение с избытком), поскольку при этом мы расширяем промежуток, которому принадлежит значение $1/x$ и тем самым гарантируем границы значения этой величины.

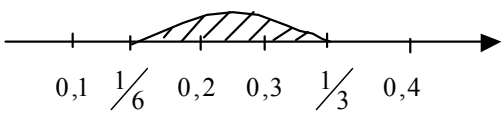


Рис. 1.1

Если бы мы считали $0{,}166\ldots \approx 0{,}2$ и $0{,}333\ldots \approx 0{,}3$ (по известным правилам округления), то $0{,}2 < 1/x < 0{,}3$, т.е. истинное значение выражения $1/x$ могло бы оказаться за пределами полученных границ (рис. 1.1).

§ 2. Абсолютная погрешность.

Абсолютной погрешностью приближенного значения величины называется модуль разности между истинным и приближенным значениями этой величины. Таким образом, если x- истинное значение величины, a- ее приближенное значение, то абсолютная погрешность $\Delta = |x-a|$.

Отсюда следует, что $x = a \pm \Delta$. Чем меньше абсолютная погрешность, тем ближе приближенное значение величины к истинному ее значению.

Пример 2. Пусть $a = 8{,}6$ – приближенное значение числа x, а $\Delta = 0{,}1$ – абсолютная погрешность приближения. Найти x.

Решение.

Так как $|x - a| = \Delta$, то $x = a \pm \Delta$; следовательно, $x = 8{,}6 \pm 0{,}1$. Таким образом $x = 8{,}5$ или $x = 8{,}7$.

На практике истинное значение искомой величины бывает неизвестно, и поэтому абсолютную погрешность приближения этой величины найти нельзя. В таких случаях приходится оценивать абсолютную погрешность некоторым положительным числом, которое заведомо не меньше этой

абсолютной погрешности. Такое число называется **предельной абсолютной погрешностью** приближения величины a и обозначается через Δ_a.

Таким образом, если a – приближенное значение числа x, а Δ_a предельная абсолютная погрешность, то $|x-a| = \Delta \leq \Delta_a$. В этом случае говорят, что число a есть приближенное значение числа x с точностью до Δ_a и пишут $x = a \pm \Delta_a$.

При вычислениях в качестве предельной абсолютной погрешности стараются указать число Δ_a, наиболее близкое к Δ и удовлетворяющее неравенству $\Delta \leq \Delta_a$.

По известной предельной абсолютной погрешности Δ_a можно указать границы, в которых заключено точное значение числа x:

$$(x = a \pm \Delta_a) \Leftrightarrow (a - \Delta_a \leq x \leq a + \Delta_a).$$

Пример 3. Известно, что $1{,}73 \leq x \leq 1{,}75$. Вычислить промежуточное значение x, равное среднему арифметическому границ, и указать точность приближения.

Решение:

Находим $$x = \frac{1{,}73 + 1{,}75}{2} = 1{,}74$$

Точность приближения в этом случае равна полуразности границ, т.е.

$$\Delta_a = \frac{1{,}75 - 1{,}73}{2} = 0{,}01.$$

Итак, $x = 1.74 \pm 0.01$.

Пример 4. При измерении длины a и ширины b прямоугольника получили, что $a = 5{,}4 \pm 0{,}1$ см и $b = 3{,}7 \pm 0{,}1$ см. Найти приближенные значения периметра и площади прямоугольника.

Решение.

Пусть $P = 2(a + b)$ – периметр прямоугольника, а $S = ab$ – его площадь. Так как $5{,}3 \le a \le 5{,}5$, $3{,}6 \le b \le 3{,}8$, то имеем $17{,}8 \le 2(a + b) \le 18{,}6$, $19{,}08 \le ab \le 20{,}9$ и, следовательно, $P = 18{,}2 \pm 0{,}4$ см, $S = 19{,}99 \pm 0{,}91$ см^2. Здесь в качестве приближенного значения величин P и S взяты полусуммы границ, и, соответственно, точность приближений равна полуразностям этих границ.

§ 3. Относительная погрешность

Характеристикой качества измерения или вычисления служит не абсолютная, а относительная погрешность.

Относительная погрешность δ приближенного значения a величины x называется отношение абсолютной погрешности Δ этого приближения к модулю числа x, т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|}$$

Так как само число *x,* а значит, и абсолютная погрешность Δ обычно неизвестны, то на практике приходится оценивать относительную погрешность некоторым положительным числом $\delta_{a,}$ которое заведомо не меньше этой относительной погрешности, т.е. $\delta \le \delta_a$. Это число называется **предельной относительной погрешностью**. В качестве такого числа обычно берут отношение $\frac{\Delta_a}{|a|}$, где Δ_a - предельная абсолютная погрешность.

Итак, связь между предельными относительной и абсолютной погрешностями приближенного значения *a* выражается с помощью формул

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}, \qquad \Delta_a = \delta_a |a|.$$

Если δ_a- предельная относительная погрешность приближенного значения *a* числа *x* , то говорят, что *a* есть приближенное значение *x* с относительной точностью до δ_a. Число δ_a обычно записывают с одной, двумя значащими цифрами .

Значащими цифрами числа *x,* записанного в виде десятичной дроби, называются все его цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля.

Например, в числе 3,14 – три значащие цифры, в числе 0,01095 – четыре, в числе 0,103 – три, в числе 0,57600 – пять значащих цифр.

Пример 5. Округлить число 971,45 до единиц. Найти абсолютную и относительную погрешности приближения.

Решение.

Имеем $971{,}45 \approx 971$, $\Delta = |971{,}45 - 971| = 0{,}45$,

$$\delta = \frac{0{,}45}{971{,}45} = 0{,}00046\ldots \approx 0{,}0005 = 0{,}05\%.$$

Пример 6. Сравнить качества измерений толщины d человеческого волоса (в мм) и расстояния l от Земли до Луны (в км), если $d = 0{,}15 \pm 0{,}005$ и $l = 380\,000 \pm 500$.

Решение.

Найдем предельную относительную погрешность:

$$\delta_d = \frac{0{,}005}{0{,}15} = \frac{1}{30} = 0{,}0333\ldots \approx 0{,}04 = 4\%;$$

$$\delta_l = \frac{500}{380000} = \frac{1}{760} = 0{,}00131\ldots \approx 0{,}002 = 0{,}2\%.$$

Следовательно, качество измерения расстояния от Земли до Луны намного лучше.

§ 4. Число верных десятичных знаков

На практике приближенные значения чисел удобно записывать так, чтобы по записи числа можно было сразу судить

о погрешности приближения. Для этого вводится понятие числа верных десятичных знаков

Положительное приближенное число a, записанное в виде десятичного разложения, имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превышает ½ единицы n-го разряда.

Например, пусть $x = 10{,}00237...$, $a = 9{,}9999$, в этом случае

$$\Delta = |x - a| = 0{,}00247... < 0{,}005,$$

т.е. меньше половины единицы третьего слева разряда. Значит, число a содержит три верных знака.

Если приближенное значение a числа x содержит n верных десятичных знаков, то при $n > 1$ за предельную относительную погрешность можно принять число

$$\delta_a = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

где k – первая значащая цифра числа a.

Обратно, если известно, что $\delta \le \frac{1}{2(k+1)}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, то число a имеет n верных знаков в узком смысле. В частности, число a заведомо имеет n верных знаков в узком смысле, если

$$\delta \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{n}.$$

Пример 7. Какова предельная относительная погрешность, если вместо числа π взять число $a = 3{,}14$?

Решение.

Первая значащая цифра числа a $k = 3$; все десятичные знаки верны, т.е. $n = 3$. Следовательно,

$$\delta_a = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{3-1} = \frac{1}{600} = \frac{1}{6}\ \%.$$

Пример 8. Со сколькими десятичными знаками надо взять $\sqrt{20}$, чтобы погрешность не превышала 0,1%?

Решение. Пусть $\sqrt{20} = x$, т.к. $4 < \sqrt{20} < 5$, то первая значащая цифра $k = 4$. $\delta_a = 0{,}001$. Следовательно, должно выполнятся неравенство $0{,}001 \le \frac{1}{2 \cdot (4+1)} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ или $\left(\frac{1}{10}\right)^3 \le \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Следовательно,

$$n \ge 3.$$

Если абсолютная погрешность приближенного числа a не превышает единицы последнего разряда (таковы, например, числа, возникшие при измерении с точностью до соответствующей единицы), то говорят, что все десятичные знаки этого приближенного числа верные в широком смысле. При наличии большого числа значащих цифр в приближенном числе последнее, если оно является окончательным результатом

вычислений, обычно округляют так, чтобы все оставшиеся цифры были верными в узком или широком смысле.

§ 5. Погрешность арифметических действий

1. Предельная абсолютная погрешность суммы равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых.

Таким образом, если a и b- приближенные значения чисел x и y с точностью до Δ_a и $\Delta_в$, то сумма $x+y$ будет вычислена с точностью $\Delta_a+\Delta_в$, т.е. $\Delta_{a+в}=\Delta_a+\Delta_в$.

Замечание. Правило верно для любого количества слагаемых.

2. Предельная абсолютная погрешность разности равна сумме предельных абсолютных погрешностей уменьшаемого и вычитаемого, т.е.

$$\Delta_{a-в}=\Delta_a+\Delta_в.$$

Пример 9. Найти сумму чисел $x = 4{,}863 \pm 0{,}0005$ и $y = 6{,}725 \pm 0{,}0005$.

Решение.

Имеем $x+y = 4{,}863 + 6{,}725 = 11{,}588$,

$\Delta_{a+в}=\Delta_a+\Delta_в = 0{,}0005+ 0{,}0005 = 0{,}001$.

Таким образом, $x+y = 11{,}588 \pm 0{,}001$ (все цифры верные).

Пример 10. Найти разность чисел $x = 9{,}6 \pm 0{,}1$ и $y = 3{,}3 \pm 0{,}1$.

Решение.

Имеем $x - y = 9{,}6 - 3{,}3 = 6{,}3$,

$\Delta_{а-в} = \Delta_а + \Delta_в = 0{,}1 + 0{,}1 = 0{,}2$.

Таким образом, $x - y = 6{,}3 \pm 0{,}2$ (в полученном результате цифра 6 – верная).

3. Предельная относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей этих слагаемых:

$$\delta_{а+в} \le \max(\delta_а, \delta_в).$$

4. Предельная относительная погрешность разности не поддается простому учету. Особенно неблагоприятна в этом смысле разность двух близких чисел.

Пример 11. Найти разность чисел $a = 6{,}135$ и $b = 6{,}131$.

Решение.

Найдем $a - b = 6{,}135 - 6{,}131 = 0{,}004$.

Предельная относительная погрешность равна

$$\delta_{а-в} = \frac{\Delta_{а-в}}{|a-b|} = \frac{\Delta_а + \Delta_в}{|a-b|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0.001 + \frac{1}{2}\cdot 0.001}{0.004} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Вычислим число верных десятичных знаков разности:

$$0{,}25 \le \frac{1}{2(4+1)} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \text{ или } 0{,}25 \le \left(\frac{1}{10}\right)^{n}.$$

Поскольку последнее неравенство выполняется только при $n = 0$, то, следовательно, полученный результат не содержит ни одного верного знака.

Учитывая рассмотренный пример, следует избегать вычитания близких между собой приближенных чисел, преобразуя, в случае надобности, данное выражение так, чтобы эта нежелательная операция отсутствовала.

5. Предельная относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta_{ав} = \delta_a + \delta_в,$$

$$\delta_{a/в} = \delta_a + \delta_в.$$

6. Предельные абсолютные погрешности произведения и частного удобнее находить через предельную относительную погрешность произведения или частного:

$$\Delta_{ав} = |a \cdot b| \cdot \delta_{ab},$$

$$\Delta_{a/b} = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot \delta_{a/b}.$$

Пример 12. Найти произведение чисел $x = 0{,}68 \pm 0{,}005$ и $y = 0{,}32 \pm 0{,}005$.

Решение.

Имеем $xy = 0{,}68 \cdot 0{,}32 = 0{,}2176$,

$$\delta_a = \frac{0{,}005}{0{,}68} \approx 0{,}008\,, \qquad \delta_b = \frac{0{,}005}{0{,}32} \approx 0{,}015\,;$$

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b = 0{,}008 + 0{,}015 = 0{,}023\,.$$

Зная приближенное значение произведения и предельную относительную погрешность, найдем предельную абсолютную погрешность: $\Delta_{ab} = xy \cdot \delta_{ab} = 0{,}2176 \cdot 0{,}023 \approx 0{,}0051$.

Значит, $xy = 0{,}2176 \pm 0{,}0051$.

Пример 13. Расстояние прямолинейного участка пути между двумя станциями равно 2,4 ± 0,1 км. За какое время может распространиться звук от одной станции до другой по воздуху и по рельсам? Скорость звука в воздухе 332 $м/с$, скорость звука в стали $5{,}5 \cdot 10^{3}\, м/с$.

Решение.

Найдем приближенные значения времени распространения звука в воздухе и в стали:

$$t_в = \frac{2400}{332} \approx 7{,}2 \text{ с}; \; t_c = \frac{2400}{5500} \approx 00{,}44 \text{ с}.$$

Вычислим предельные относительные погрешности этих приближений:

$$\delta_в = \delta_{s/v} = \delta_s + \delta_v = \frac{0{,}1}{2{,}4} + \frac{1}{332} \approx 0{,}042 + 0{,}0034 \approx 0{,}05\,;$$

$$\delta_c = \delta_{s/v} = \delta_s + \delta_v = \frac{0{,}1}{2{,}4} + \frac{0{,}01}{5{,}50} \approx 0{,}042 + 0{,}002 \approx 0{,}044\,.$$

Найдем теперь предельную абсолютную погрешность:

$$\Delta_в = t_в \cdot \delta_в = 7{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}36 \approx 0{,}4;$$

$$\Delta_c = t_c \cdot \delta_c = 0{,}44 \cdot 0{,}044 \approx 0{,}02.$$

Следовательно, $t_в = 7{,}2 \pm 0{,}4$ с, $t_c = 0{,}44 \pm 0{,}02$ с.

7. Предельная относительная погрешность степени равна произведению показателя степени на предельную относительную погрешность основания степени, т.е.

$$\delta_{a^n} = n \cdot \delta_a.$$

8. Предельная относительная погрешность корня *n*- ой степени в *n* раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа, т. е.

$$\delta_{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n} \cdot \delta_a.$$

§ 6. Арифметические действия с приближенными числами

Правила приближенных вычислений, изложенные в § 5, гарантируют, что действительная погрешность во всяком случае не превзойдет границы погрешности, вычисленной по точным формулам. Однако такая оценка погрешности результата связана с необходимостью производить довольно громоздкие вычисления. Поэтому на практике можно получить вполне надежный результат(не учитывая погрешности промежуточных

вычислений), если воспользоваться простыми правилами подсчета верных цифр.

Правило сложения и вычитания:

1. Выделить слагаемое с наименьшим числом верных десятичных знаков (наименее точное слагаемое);

2. округлить остальные слагаемые, оставляя в каждом на один десятичный знак больше, чем в выделенном наименее точном слагаемом;

3. выполнить действие с учетом всех сохраненных знаков;

4. округлить результат до предпоследнего знака.

Пример 14. Найти сумму чисел $x \approx 13{,}6$ и $y \approx 6{,}7378$.

Решение. Здесь $x \approx 13{,}6$ - наименее точное слагаемое, имеющее один верный десятичный знак. Поэтому округляем 6,7378 до двух десятичных знаков: $6{,}7378 \approx 6{,}74$. Далее находим $13{,}6 + 6{,}74 = 20{,}34 \approx 20{,}3$ (результат округлен до одного десятичного знака).

Правило умножения и деления:

1. Выделить исходное данное с наименьшим числом верных значащих цифр;

2. округлить остальные данные так, чтобы в каждом из них содержалось на одну значащую цифру больше, чем в выделенном;

3. выполнить действие с учетом всех сохраненных значащих цифр;

4. сохранить в результате столько значащих цифр, сколько их было в выделенном исходном данном.

Пример 15. Найти произведение чисел $x \approx 8{,}165$ и $y \approx 5{,}6$.

Решение.

Число 5,6- множитель, имеющий наименьшее число верных значащих цифр. Поэтому округляем 8,165 до трех значащих цифр: $8{,}165 \approx 8{,}17$. В результате умножения находим $8{,}17 \cdot 5{,}6 = 45{,}752 \approx 46$ (в полученном произведении сохраняем только две значащие цифры, т.е. столько, сколько их было в выделенном множителе).

Пример 16.

Определить плотность ρ жидкости, объем которой $V \approx 13{,}6$ см^3, а масса $m \approx 14{,}42$ г.

Решение.

Находим $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{14{,}42}{13{,}6} = 1{,}06029... \approx 1{,}06 г/см^3.$

Сохраняем только три значащие цифры, т.е. столько, сколько их было в наименее точном исходном данном.

Проверим теперь, являются ли все полученные цифры верными. Для этого определим относительную погрешность приближенного значения частного:

$$\delta_\rho = \frac{0{,}01}{14{,}42} + \frac{0{,}1}{13{,}6} = 0{,}00069... + 0{,}0073... \approx 0{,}0079;$$

$$\Delta_\rho = \rho \cdot \delta = 1{,}06 \cdot 0{,}0079 \approx 0{,}008.$$

Следовательно, в числе 1,06 все значащие цифры – верные.

Правило возведения в степень и извлечения корня:

При возведении в степень (извлечении корня) следует сохранять столько значащих цифр, сколько верных значащих цифр имеет основание степени (подкоренное число).

Замечание. При вычислении промежуточных результатов следует сохранять на одну цифру больше, чем в указанных выше правилах, причем в окончательном результате запасную цифру в расчет не принимать.

Пример 17. Вычислить значение выражения $a + bc$, если $a \approx 114{,}568;\ \ b \approx 12{,}5;\ \ \ c \approx 0{,}82.$

Решение.

Вычисляем $bc \approx 122{,}5 \cdot 0{,}82 = 10{,}25 \approx 10{,}3$ (так как это промежуточный результат, то сохраняем одну запасную цифру). Далее получаем $a + bc = 114{,}568 + 10{,}3 \approx 114{,}57 + 10{,}3 = 124{,}87 \approx 125.$

В окончательном результате производим округление до целых единиц, так как в наименее точном слагаемом (10,3) цифра десятых – запасная и в расчет не берется.

Упражнения и задачи.

1.1 Найти границы периметра квадрата со стороной x, где $5{,}1 \le x \le 5{,}2$.

1.2 Известно, что $3 \le a \le 4$. Найти границы значения выраже - ния: а) $5a$; б) $0{,}3a$; в) $-a$; г) $-0{,}2a$.

1.3 Найти границы значения выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, если $0{,}1 < a < 0{,}2$ и $0{,}4 < b < 0{,}5$.

1.4 Найти границы значения выражения $5a-3x$, если $3{,}2 < a < 3{,}4$ и $0{,}7 < x < 0{,}8$.

1.5 Найти границы значения выражения $9y-4x$, если $4{,}1 < x < 4{,}2$ и $0{,}6 < y < 0{,}7$.

1.6 При измерении сторон треугольника получили:

$a = 22{,}2 \pm 0{,}1$ см; $b = 35{,}4 \pm 0{,}1$ см; $c = 53{,}1 \pm 0{,}1$ см.

Найти периметр треугольника.

1.7 При измерении сторон треугольника получили:

$a = 9{,}6 \pm 0{,}05$ см; $b = 5{,}9 \pm 0{,}05$ см; $c = 13{,}3 \pm 0{,}05$ см.

Найти периметр треугольника.

1.8 При измерении сторон треугольника получили:

$a = 32{,}4 \pm 0{,}1$ см; $b = 18{,}1 \pm 0{,}1$ см; $c = 20{,}8 \pm 0{,}1$ см.

Найти периметр треугольника.

1.9. Известны приближенное значение a некоторого числа x

и абсолютная погрешность приближения Δ. Найти x, если: а) $a = 12$ и $\Delta = 0{,}3$; б) $a = 21$ и $\Delta = 0{,}2$.

1.10. Найти границы, в которых заключено число y, если $y = 12{,}7 \pm 0{,}5$.

1.11. Число 971,45 округлить до разряда единиц, найти абсолютную и относительную погрешность.

1.12. Дано $x = 33{,}4 \pm 0{,}1$. Вычислить предельную относительную погрешность в процентах.

1.13. Округлить числа 29,15 и 3,25 до первого десятичного знака после запятой.

1.14. Найти предельную абсолютную и относительную погрешности следующих приближенных чисел, полученных при измерении:

а) 23,015 кг; б) 84,5 см; в) $25^{o}\,15^{/}$.

1.15. При вычислении дробь $\frac{7}{9}$ заменили приближенным значением 0,7. Какова относительная погрешность данного приближения?

1.16. При вычислении дробь $\frac{5}{7}$ заменили приближенным значением 0,7. Какова относительная погрешность данного приближения?

1.17. При вычислении дробь $\frac{4}{9}$ заменили приближенным значением 0,4. Какова относительная погрешность данного приближения?

1.18. Округлить число 6,36 до единиц. Указать относительную погрешность округления.

1.19. Известно, что 10,3 является приближенным значением числа x с точностью до 0,1. Какова предельная относительная погрешность данного приближения?

1.20. Вычислить приближенное значение числа x, равное среднему арифметическому границ, и указать точность такого приближения, если: а) $10 \le x \le 12$;

б) $104 \le x \le 105$.

1.21. Вычислить приближенное значение числа x, равное среднему арифметическому границ, и указать точность такого приближения, если: а) $0{,}25 \le x \le 0{,}3$;

б) $3{,}1 \le x \le 3{,}2$.

1.22. В результате измерения получены верные в широком смысле в написанных знаках приближенные числа:

а) $12^{o}\,07^{/}\,14^{//}$; б) 38,5см; в) 62,215 кг.

Вычислить их абсолютные и относительные погрешности.

1.23. Вычислить абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел, верных в узком смысле в написанных знаках: а) 241,7; б) 0,035; в) 3,14.

1.24. Определить число верных знаков и дать соответствующую запись приближенных чисел:

а) 48 361 при точности в 1%; б) 14,9360 при точности в 1%; в) 592,8 при точности в 2%.

1.25. При измерении длины пути получен результат 25,2 км с точностью до 2 м, а при измерении площади (аэрофотосъемка) получен результат 1500 $м^2$ с точностью до 30 $м^2$. Вычислить предельную абсолютную и предельную относительную погрешности обоих результатов.

1.26. При измерении длины участка пути в 10 км допущена ошибка в 10 м, а при измерении диаметра гайки в 4 см допущена ошибка в 1 мм. Какое из этих двух измерений более точное?

1.27. Каковы предельные абсолютная и относительная погрешности приближенных чисел, полученных при округлении: а) 36,1; б) 0,08.

1.28. Округлить число 5,3726 до тысячных, до сотых и до десятых долей. Найти абсолютную и относительную погрешности каждого из этих трех округлений.

1.29. Округлить до трех значащих цифр следующие числа: 0,02025, 1 876 672, 599 983.

1.30. Определить число верных знаков в узком смысле и дать соответствующую запись приближенных чисел:

а) 413 287,51, если предельная относительная погрешность не превышает 1%;

б) 0,0794, если предельная относительная погрешность не превышает 2%.

1.31. При измерении длины в 10 см абсолютная погрешность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее?

1.32. Определить, сколько верных знаков содержит число $x = 2{,}3752$, если относительная погрешность этого числа составляет 1%?

1.33. Число $x = 12{,}125$ содержит три верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

1.34. Какое приближенное значение числа $x = 35{,}84$ имеет абсолютную погрешность, равную: а) 0,04; б) 0,16?

1.35. Найти разность чисел x и y, если $x = 7{,}3 \pm 0{,}1$; $y = 3{,}5 \pm 0{,}1$.

1.36. Найти сумму чисел $x \approx 23{,}6$ и $y \approx 5{,}8379$.

1.37. Найти сумму и разность чисел x и y, где $x = 19{,}2 \pm 0{,}1$ и $y = 7{,}348 \pm 0{,}001$. Сколько верных цифр в полученных результатах?

1.38. Найти произведение чисел x и y, если $x = 0{,}54 \pm 0{,}005$ и $y = 0{,}23 \pm 0{,}005$.

1.39. Найти произведение чисел $x \approx 6{,}153$ и $y \approx 4{,}8$.

1.40. Найти значение a^2, если $a \approx 1{,}32$.

1.41. Найти значение выражения x^2, если: а) $x \approx 1{,}89$; б) $x \approx 573$.

Произвести указанные действия над приближенными числами, в которых все десятичные знаки являются верными в узком смысле:

1.42. а) 25,386 + 0,49 + 3,10 + 0,5; в) 38,1 + 2,0 + 3,124.
б) $1{,}2 \cdot 10^2 + 41{,}72 + 0{,}09$;

1.43. а) 148,1 – 63,871; б) 29,72- 11,25; в) 34,22 – 34,21.

1.44. 130,6+ 0,255+ 1,15224+ 41,84+ 1,8216.

1.45. $17{,}83 + 1{,}07 + 1{,}1 \cdot 10^2$.

1.46. 153,21- 81,329.

1.47. 61,32- 61,31.

1.48. а) $3{,}49 \cdot 8{,}6$; б) $25{,}1 \cdot 1{,}743$; в) $0{,}02 \cdot 16{,}5$.

1.49. а) $5{,}684 : 5{,}032$; б) 0,144 : 1,2; в)2,16 : 4.

1.50. $35{,}2 \cdot 1{,}748$.

1.51. $65{,}3 \cdot 78{,}5$.

1.52. 7,6 : 2,314.

1.53. 170 : 5.

1.54. $40{,}5^3$.

1.55. $\sqrt{54{,}71}$.

1.56. а) $0{,}4158^2$; б) $65{,}2^3$; в) $1{,}5^2$.

1.57. а) $\sqrt{2{,}715}$; б) $\sqrt[3]{65{,}2}$; в) $\sqrt{81{,}1}$.

1.58. Найти значение выражения $a+bc$, если $a \approx 217{,}438$; $b \approx 32{,}6$; $c \approx 0{,}67$.

1.59. Найти значение выражения $a+bc$, если $a \approx 12{,}3$; $b \approx 0{,}083$; $c \approx 4{,}5368$.

1.60. Найти значение выражения $ab-c$, если $a \approx 642$; $b \approx 0{,}011$; $c \approx 1{,}3$.

1.61. Найти значение выражения $a-bc$, если $a \approx 118{,}2$; $b \approx 1{,}8523$; $c \approx 23$.

1.62. Стороны прямоугольника равны x = 2,50 см $\pm$ 0,01 см, y = 4,00 см $\pm$ 0,02 см. В каких границах заключается площадь S этого прямоугольника? Каковы абсолютная погрешность Δ и относительная погрешность δ площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

1.63. Масса тела $m = 12{,}59$ г $\pm$ 0,01 г, а объем $V = 3{,}2\ \text{см}^3 \pm 0{,}2\ \text{см}^3$. Определить плотность тела и оценить абсолютную и относительную погрешности плотности, если за вес тела и объем его принять средние значения.

1.64. Радиус круга $r = 7{,}2$ м $\pm$ 0,1 м. С какой минимальной относительной погрешностью может быть определена площадь круга, если принять $\pi = 3{,}14$?

1.65. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть: $x = 24{,}7$ м $\pm$ 0,2 м, $y = 6{,}5$ м $\pm 0{,}1$ м, $z = 1{,}2$ м $\pm 0{,}1$ м. В каких границах заключается объем V этого параллелепипеда? С какими абсолютной и относительной погрешностями может быть определен объем этого параллелепипеда, если за его измерения принять средние значения?

1.66. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону квадрата x, где $2\text{м} < x < 3\text{м}$, чтобы иметь возможность определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м^2?

1.67. С какими абсолютными погрешностями Δ достаточно измерить стороны x и y прямоугольника, чтобы площадь его можно было вычислить с точностью до 0.01 м^2, если ориентировочно стороны прямоугольника не превышают 10 м каждая?

1.68. Вычислить разность площадей двух квадратов, стороны которых по измерению равны 15,28 см и 15,22 см (с точностью до 0,05 мм).

1.69. Стороны прямоугольника равны 4,02 м и 4,96 м (с точностью до 1 см). Вычислить площадь прямоугольника.

1.70. Катеты прямоугольного треугольника равны 12,10 см и 25,21 см (с точностью до 0,01 см). Вычислить тангенс угла, противолежащего первому катету.

1.71. Сторона квадрата равна 45,3 см (с точностью до 1 мм). Найти площадь квадрата.

1.72. Найти периметр и площадь прямоугольника, длина которого $x = 24{,}6 \pm 0{,}1$ см, а ширина $y = 15{,}3 \pm 0{,}1$ см.

1.73. Найти периметр и площадь прямоугольника, длина которого $x = 37{,}1 \pm 0{,}1$ см, а ширина $y = 12{,}3 \pm 0{,}1$ см.

1.74. Со сколькими знаками нужно взять число $\sqrt{21}$, чтобы предельная относительная погрешность не превышала 1%?

1.75. Со сколькими знаками нужно взять числа ln 40 и arctg 2, чтобы их предельная относительная погрешность не превышала 0,1%?

Ответы.

1.4. $13{,}6 < 5a - 3x < 1{,}49$.

1.5. $-11{,}4 < 9y - 4x < -10{,}1$.

1.6. $110{,}7 \pm 0{,}3$ см.

1.7. $28{,}8 \pm 0{,}15$ см.

1.8. $71{,}3 \pm 0{,}3$ см.

1.14. а) 1 г, 0,0043%; б) 1 мм, 0,12%; в) $1'$, 0,066%.

1.15. 0,1.

1.16. $\frac{1}{50}$.

1.17. 0,1.

1.20. а) $x = 11 \pm 1$; б) $x = 104{,}5 \pm 0{,}5$.

1.21. а) $x = 0{,}275 \pm 0{,}025$; б) $x = 3{,}15 \pm 0{,}5$.

1.22. а) $1''$, 0,0023%; б) 1мм, 0,26%; в) 1г, 0,0016%.

1.23. а) 0,05, 0,021%; б) 0,0005, 1,45%; в) 0,005, 0,16%.

1.24. а) 2 знака; $48 \cdot 10^3$ или $49 \cdot 10^3$, так как число заключено между 47877 и 48845;

б) 2 знака, 15;

в) 1знак; $6 \cdot 10^2$. Практически результат следует писать в виде $(5{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$.

1.25. 1) Δ= 0,002 км, δ= 0,008%; 2) Δ= 30 м^2, δ= 2%.

1.26. Первое.

1.27. а) 0,05, 0,14%; б) 0.005, 6,25%.

1.28. 1) 5,373, 0,0004, 0,0074%; 2) 5,37, 0,0026, 0,048%; 3) 5,4, 0,0274, 0,51% .

1.29. $202 \cdot 10^{-4}$; $188 \cdot 10^4$; $600 \cdot 10^3$.

1.30. а) 2 знака, $41 \cdot 10^4$; б) 1 знак, $8 \cdot 10^{-2}$.

1.31. Второе.

1.32. 2 знака.

1.33. Не превышает 0,41%.

1.34. а) 35,80 и 35,88; б) 36,00 и 35,68.

1.42. а) 29,5; б) $1{,}6 \cdot 10^2$; в) 43,2.

1.43. а) 84,2; б) 18,5 или $18{,}47 \pm 0{,}01$;

в) результат вычитания не имеет верных знаков, так как разность равна одной сотой при возможном значении абсолютной погрешности в одну сотую.

1.44. 185,7.

1.45. $1{,}3 \cdot 10^2$.

1.46. 71,88.

1.47. Вычитание произвести нельзя.

1.48. а) $30{,}0 \pm 0{,}2$; б) $43{,}7 \pm 0{,}1$; в) $0{,}3 \pm 0{,}1$.

1.49. а) $1{,}1295 \pm 0{,}0002$; б) $0{,}120 \pm 0{,}006$;

в) частное может колебаться между 48 и 62. Следовательно, в записи частного нельзя считать достоверным ни один десятичный знак.

1.50. 61,6.

1.51. $512 \cdot 10$.

1.52. 3,3.

1.53. $3 \cdot 10$.

1.54. $66 \cdot 10^3$.

1.55. 7,397.

1.56. а) 0,1729; б) $277 \cdot 10^3$; в) 2.

1.57. а) 1,648; б) $4{,}025 \pm 0{,}001$; в) $9{,}006 \pm 0{,}003$.

1.59. 12,7.

1.60. 5,8.

1.61. 75,6.

1.62. 9,9102 см^2 $\le S \le$ 10,0902 см^2; $\Delta \le$ 0,0902 см^2, $\delta \le$ 0,91%.

1.63. 3,93 г/см^3 $\pm$ 0,27г/см^3; $\delta \le$ 7,3%.

1.64. $\delta \le 3{,}05\%$.

1.65. 172,480 м^3 $\le v \le$ 213,642 м^3, $v = 192{,}660$ м^3 $\pm$ 20,982 м^3, $\delta \approx 12\%$.

1.66. $\Delta \le 0{,}17$ мм.

1.67. $\Delta <$ 0,0005 м.

1.68. $1{,}8 \pm 0{,}3$ см^2. Указание. Воспользоваться формулой приращения площади квадрата.

1.69. $19{,}9 \pm 0{,}1$ м^2.

1.70. $0{,}480 \pm 0{,}001$.

1.71. $(2{,}05 \pm 0{,}01) \cdot 10^3$ см^2.

1.72. $P =$ 79,8 $\pm$ 0,4 см; $S =$ 376,39 $\pm$ 3,99 см^2.

1.73. $P =$ 98,8 $\pm$ 0,4 см; $S =$ 456,34 $\pm$ 4,94 см^2.

1.74. Не меньше, чем с 2 знаками.

1.75. Не меньше, чем с 3 знаками.

§ 7. Основные задачи теории погрешностей.

Прямая задача теории погрешностей заключается в следующем: известны погрешности некоторой системы

величин, требуется определить погрешность данной функции от этих величин. Для решения данной задачи рассмотрим два случая.

Случай 1. Функция одной переменной.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке, содержащем рассматриваемую точку x, то

$$\Delta_y = \left| f'(x) \right| \Delta_x .$$

Если $f(x) > 0$, то для предельной относительной погрешности δ_y функции $y = f(x)$ имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{\left| f'(x) \right|}{f(x)} \Delta_x = \left| \left[\ln f(x) \right]' \right| \Delta_x ,$$

где Δ_x – предельная абсолютная погрешность аргумента. В частности, для основных элементарных функций верны следующие формулы.

Таблица 1

$y = f(x)$	Δ_y	δ_y
$y = x^n$	$nx^{n-1}\Delta_x$	$\lvert n \rvert \delta_x$
$y = a^x (a > 0)$	$a^x \ln a \Delta_x$	$\Delta_x \ln a$
$y = e^x$	$e^x \Delta_x$	Δ_x
$y = \ln x (x > 0)$	$\frac{\Delta_x}{x}$	$\frac{\Delta_x}{x \ln x}$
$y = \sin x$	$\lvert \cos x \rvert \Delta_x$	$\lvert \operatorname{ctg} x \rvert \Delta_x$

$y=\ \cos x$	$\lvert\sin x\rvert\ \Delta_x$	$\lvert\mathrm{tg}x\rvert\ \Delta_x$
$y=\mathrm{tg}x$	$(1+\mathrm{tg}^2x)\ \Delta_x$	$\frac{2}{\lvert\sin 2x\rvert}\Delta_x$
$y=\mathrm{ctg}x$	$(1+\mathrm{ctg}^2x)\ \Delta_x$	$\frac{2}{\lvert\sin 2x\rvert}\Delta_x$

Замечание. Поскольку модуль производной таких функций, как sin$x$, cos$x$, arctg$x$, arcctg$x$ не превосходит единицы, то для этих функций их абсолютная погрешность не превосходит абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{\sin x} = |\cos x|\,\Delta_x \le \Delta_x,$$

$$\Delta_{\cos x} = |\sin x|\,\Delta_x \le \Delta_x,$$

$$\Delta_{arctgx} = \frac{\Delta_x}{1+x^2} \le \Delta_x,$$

$$\Delta_{arcctgx} = \frac{\Delta_x}{1+x^2} \le \Delta_x.$$

По аналогичным соображениям абсолютная погрешность функций tg$x$, ctg$x$, arcsin$x$, arccos$x$ не меньше абсолютной погрешности аргумента:

$$\Delta_{tgx} = \left(1+tg^2x\right)\Delta_x \ge \Delta_x,$$

$$\Delta_{ctgx} = \left(1+ctg^2x\right)\Delta_x \ge \Delta_x,$$

$$\Delta_{\arcsin x} = \frac{\Delta_x}{\sqrt{1-x^2}} \ge \Delta_x,$$

$$\Delta_{\arccos} = \frac{\Delta_x}{\sqrt{1-x^2}} \ge \Delta_x.$$

Случай 2. Функция нескольких переменных.

Пусть $u= f (x_1,x_2,\ldots,x_n)$- дифференцируемая в рассматриваемой области функция. Тогда предельная абсолютная погрешность Δ_u значения функции определяется соотношением

$$\Delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k} \qquad (1),$$

где Δ_{x_k} - предельные абсолютные погрешности значений соответствующих аргументов. Для предельной относительной погрешности имеет место равенство

$$\delta_u = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k} = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_k} \right| \Delta_{x_k} \qquad (2).$$

Пример 18. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности объема конуса радиуса r и высоты h, если $r = 15 \pm 0{,}02$ см, $h = 19{,}1 \pm 0{,}05$ см и $\pi = 3{,}14$.

Решение.

Имеем $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 4498{,}1$. Учитывая, что $r = 15$, $h = 19{,}1$, $\pi = 3{,}14$, $\Delta_r = 0{,}02$, $\Delta_h = 0{,}05$ и $\Delta_\pi = 0{,}0016$, найдем $\frac{\partial v}{\partial \pi} = \frac{1}{3} r^2 h = 1432{,}5$, $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{2}{3}\pi r h = 599{,}74$ и $\frac{\partial v}{\partial h} = \frac{1}{3}\pi r^2 = 235{,}5$. Применяя формулу (1), получаем предельную абсолютную погрешность $\Delta_v = \left|\frac{\partial v}{\partial \pi}\right| \Delta_\pi + \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right| \Delta_r + \left|\frac{\partial v}{\partial h}\right| \Delta_h = 26{,}06$ см^3.

Предельная относительная погрешность может быть определена из равенства $\delta_v = \frac{26,1}{4498} = 0,006$.

Таким образом, $v = 4498 \pm 26,1\,\text{см}^3$.

Пример 19. Вычислить $S = \ln(10,3 + \sqrt{4,4})$; приближенные числа 10,3 и 4,4 верны в написанных знаках.

Решение.

Подсчитаем сначала предельную абсолютную погрешность Δ_S в общем виде: $S = \ln(a + \sqrt{b})$, $S = \frac{1}{a + \sqrt{b}}\left(\Delta_a + \frac{1}{2}\frac{\Delta_b}{\sqrt{b}}\right)$.

Имеем $\Delta_a = \Delta_b \approx \frac{1}{20}$; $\sqrt{4,4} = 2,0976...$; мы оставляем 2,1, так как относительная погрешность приближенного числа $\sqrt{4,4}$ равна $\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{40} = \frac{1}{80}$; абсолютная погрешность тогда равна $\approx 2 \cdot \frac{1}{80} = \frac{1}{40}$; за десятые доли можно поручиться.

Следовательно,

$$\Delta_S = \frac{1}{10,3 + 2,1}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{20 \cdot 2,1}\right) = \frac{1}{12,4 \cdot 20}\left(1 + \frac{1}{4,2}\right) = \frac{13}{2604} \approx 0,005.$$

Значит, сотые доли будут верны.

Теперь ведем вычисления с одним запасным знаком:

$\lg(10,3 + \sqrt{4,4}) \approx \lg 12,4 = 1,093$; $\ln(10,3 + \sqrt{4,4}) \approx 1,093 \cdot 2,303 = 2,517$

Получаем ответ: 2,52.

Обратная задача теории погрешностей: каковы должны быть абсолютные погрешности аргументов функции, чтобы абсолютная погрешность функции не превышала заданной величины.

Эта задача имеет однозначное решение только для функции одной переменной $y = f(x)$: если эта функция дифференцируема на рассматриваемом промежутке и $f'(x) \neq 0$, то

$$\Delta_x = \frac{\Delta_y}{|f'(x)|}.$$

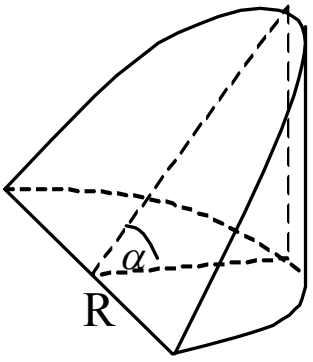
Для функции нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ задача решается только при введении каких- либо дополнительных ограничений.

Если значения всех аргументов можно одинаково легко определить с любой точностью, то обычно применяют **принцип равных влияний,** считая, что в формуле (1) все слагаемые $\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|\Delta_{x_k}$ равны между собой; это приводит к формуле

$$\Delta_{x_k} = \frac{\Delta_y}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|}$$

($k=1,2,\ldots n$).

Пример 20. Объем «цилиндрического отрезка», т.е. тела,



отсеченного от кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания, равный 2R, под углом α к основанию, вычисляется по формуле $V = \frac{2}{3}R^3 tg\alpha$. С какой точностью следует измерять радиус R≈ 60 см и угол

Рис.1.2.

наклона α, чтобы объем цилиндрического отрезка был известен с точностью до 1%?

Решение.

Если ΔV, ΔR и Δα- предельные абсолютные погрешности величин V, R и α, то предельная относительная погрешность вычисляемого объема V есть

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \le \frac{1}{100}.$$

Полагаем $\frac{3\Delta R}{R} \le \frac{1}{200}$ и $\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \le \frac{1}{200}$.

Отсюда $\Delta R \le \frac{R}{600} \approx \frac{60см}{600} = 1мм;$ $\Delta\alpha \le \frac{\sin 2\alpha}{400} \le \frac{1}{400}$ радиана≈ $9^{/}$.

Итак, мы обеспечим требуемую точность ответа в 1%, если будем измерять радиус с точностью до 1 мм, а угол наклона α с точностью до $9^{/}$.

Следует отметить, что иногда при подсчете допустимых погрешностей аргументов функции невыгодно пользоваться принципом равных влияний, так как последний может

предъявить практически невыполнимые требования. В этих случаях рекомендуется разумно перераспределить погрешности, если это возможно, с таким расчетом, чтобы суммарная погрешность не превышала заданной величины.

Пример 21. С какой точностью надо измерить радиус круга R = 30,5 см и сколько знаков взять у числа π, чтобы площадь круга была известна с точностью до 0,1%?

Решение.

Если ΔS, $\Delta\pi$, ΔR – предельные абсолютные погрешности величин S, π, R, то предельная относительная погрешность вычисляемой площади S есть $\delta S = \left|\frac{\partial S}{\partial \pi}\right| \frac{\Delta \pi}{S} + \left|\frac{\partial S}{\partial R}\right| \frac{\Delta R}{S}$.

Так как $S = \pi R^2$, то

$$\delta S = \frac{R^2 \Delta \pi}{\pi R^2} + \frac{2\pi R \Delta R}{\pi R^2};$$

$$\delta S = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} = 0{,}001$$

По принципу равных влияний следует положить

$$\frac{\Delta \pi}{\pi} = 0{,}0005;\ \frac{2\Delta R}{R} = 0{,}0005.$$

Отсюда $\Delta_\pi \le 0{,}0016$ и $\Delta_R \le 0{,}00025R = 0{,}0076$ см.

Таким образом, следовало бы взять π = 3,14 и измерять с точностью до тысячных долей сантиметра. Ясно, что такая точность измерения практически трудно осуществима. Поэтому выгоднее поступить следующим образом: взять π = 3,142,

отсюда $\frac{\Delta\pi}{\pi} = 0{,}00013$; тогда $\frac{2\Delta R}{R} = 0{,}001 - 0{,}00013 = 0{,}0087$ и $\Delta_R \leq 0{,}013$. Такая точность достигается сравнительно легко.

Упражнения и задачи

1.76. При измерении радиуса круга с точностью до 0,5 см получилось число 12 см. Найти абсолютную и относительную погрешности площади круга.

1.77. С какой предельной абсолютной погрешностью следует измерить стороны прямоугольника $a \approx 4$ м и $b \approx 5$ м, чтобы его площадь S можно было вычислить с точностью до 0,1 м^2?

1.78. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону x квадрата, чтобы определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м^2, если 2 м $< x <$ 3 м?

1.79. Радиусы оснований и образующая усеченного конуса равны R=23,64см $\pm$ 0,01 см;
r =17,31 см $\pm$ 0,01 см; l = 10,21 см $\pm$ 0,01 см; число π = 3,14.Оценить абсолютную и относительную погрешности результата.

1.80. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15,4 см $\pm$ 0,1см; один из катетов равен 6,8 см $\pm$ 0,1см. Как точно могут быть определены по этим данным

второй катет и прилежащий к нему острый угол? Найти их значения.

1.81. Вычислить плотность алюминия, если алюминиевый цилиндр диаметром 2 см и высотой 11 см весит 93,4 г. Относительная погрешность измерения длин равна 0,01, а относительная погрешность взвешивания равна 0,001.

1.82. Вычислить силу тока, если напряжение равно 221вольт ± 1 вольт, а сопротивление равно 809 ом±1ом.

1.83. Период колебания маятника длины l равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где g – ускорение силы тяжести. С какой точностью следует измерить длину маятника, период колебаний которого близок к 2 сек, чтобы получить период его колебаний с относительной погрешностью в 0,5%? Как точно должны быть взяты числа π и g?

1.84. Требуется измерить с точностью в 1% площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого2 м и 1 м, а образующая 5 м (приближенно). С какой точностью следует измерить радиусы и образующую и со сколькими знаками следует взять число π?

1.85. Для определения модуля Юнга по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$E = \frac{1}{4} \cdot \frac{l^3 P}{d^3 bs}$, где l- длина стержня, b и d - основание и высота поперечного сечения стержня, s- стрела прогиба, P- нагрузка. С какой точностью следует измерить длину l и стрелу s, чтобы погрешность E не превышала 5,5% при условии что P известна с точностью до 0,1%, величины d и b известны с точностью до 1%, $l \approx 50$ см, $s \approx 2{,}5$ см?

1.86. С какой точностью следует определить радиус основания R и высоту H цилиндрической банки, чтобы ее вместимость можно было определить с точностью до 1%?

1.87. С какой точностью следует взять приближенное значение угла $x \approx 25^o$, чтобы найти значение $\sin x$ с четырьмя верными знаками в узком смысле?

1.88. С каким числом верных знаков в широком смысле следует взять значение аргумента $x \approx 2$, чтобы получить значение функции $y = e^x$ с точностью до 0,001?

1.89. С каким числом верных знаков должен быть известен свободный член уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$, чтобы получить корни этого уравнения с четырьмя верными знаками в узком смысле?

Ответы

1.76. $\leq 12\pi$ см^2, $\leq 8{,}3\pi$%.

1.77. $\Delta_a = 0{,}01$ м, $\Delta_b = 0{,}0125$ м.

1.78. $\leq 0{,}17$ мм.

1.79. $4{,}01 \cdot 10^3$ см^2, $\Delta = 6{,}5$ см^2, $\delta = 0{,}16\%$.

1.80. Катет равен $13{,}8 \pm 0{,}2$ см; $\sin\alpha = 0{,}44 \pm 0{,}01$; $\alpha = 26^0 15' \pm 35'$.

1.81. $2{,}7 \pm 0{,}1$.

1.82. 0,27 ампер.

1.83. $\Delta_e = 0{,}3$ см; $\pi \approx 3{,}14$; $g \approx 9{,}81$.

1.84. $\delta_R = \delta_e = \frac{1}{300}$; $\pi = 3{,}14$.

1.85. $\delta_e = 0{,}2\%$; $\delta_s = 0{,}7\%$.

1.86. $\delta_R = 0{,}25\%$; $\delta_H = 0{,}5\%$.

1.87. $12''$.

1.88. 4 знака.

1.89. 4 знака.

ГЛАВА 2.
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. Постановка задачи.

Решение нелинейных уравнений с одной переменной представляет одну из важных задач прикладного анализа, необходимость в которой возникает в многочисленных и разнообразных разделах физики, механики, техники и других областях.

В общем случае нелинейное уравнение можно записать в виде: $f(x)=0$, **(1)**

где функция $f(x)$ **определена и непрерывна на конечном или бесконечном промежутке** $[a,b]$.

Всякое число $c\in[a,b]$, **обращающее функцию** $f(x)$ **в нуль, т.е. такое, при котором** $f(c)=0$, **называется корнем уравнения (1). Число *c* называется корнем *k*- той кратности, если при *x* = *c* вместе с функцией *f*(*x*) равны нулю ее производные до (*k* – 1) порядка включительно:**

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(k-1)}(c) = 0.$$

Однократный корень называется простым. Два уравнения *F*(*x*) = *0* и *G*(*x*) = 0 называются равносильными **(эквивалентными), если всякое решение каждого из них является решением и для другого, т.е. множества решений этих уравнений совпадают.**

Нелинейные уравнения с одним неизвестным подразделяют на алгебраические **и** трансцендентные**.**

Уравнение (1) называется алгебраическим, если функция *f*(*x*) есть многочлен. Путем алгебраических преобразований из всякого алгебраического уравнения можно получить уравнение в канонической форме:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ **- коэффициенты уравнения, а *x*- неизвестное. Показатель *n* называется степенью алгебраического уравнения.**

Из курса алгебры известна основная теорема алгебры**: всякое алгебраическое уравнение имеет, по крайней мере, один корень, действительный или комплексный.**

Если данное алгебраическое уравнение есть уравнение первой, второй, третьей или четвертой степени, то существуют формулы, позволяющие выразить корни уравнения через его коэффициенты с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и

извлечения корней. Для уравнений выше четвертой степени таких формул, вообще говоря, не существует.

Если функция *f(x)* не является алгебраической, то уравнение (1) называется трансцендентным.

Примерами трансцендентных уравнений являются:

$x - 10 \sin x = 0$; $5^x - 2\operatorname{tg} x = 0$; $\lg(x+5) = \cos x$.

В некоторых случаях решение трансцендентных уравнений можно свести к решению алгебраических уравнений.

Поскольку подавляющее большинство нелинейных уравнений с одним неизвестным не решается путем аналитических преобразований (точными методами), на практике их решают только численными методами. Решить такое уравнение- это значит установить, имеет ли оно корни, сколько корней, и найти значения корней с заданной точностью. Задача численного нахождения действительных и комплексных корней уравнения состоит из двух этапов:

1) отделение корней, т.е. нахождение достаточно малых промежутков, внутри которых содержится одно значение корня;

2) уточнение корней, т.е. вычисление корней с заданной степенью точности.

Будем рассматривать численные методы нахождения действительных корней уравнения (1).

Наиболее распространенными на практике численными методами решения уравнения (1) являются: метод бисекции, метод хорд, метод касательных (Ньютона), комбинированный метод, метод простой итерации. Применение того или иного численного метода для решения уравнения (1) зависит от числа корней, задания исходного приближения и поведения функции *f*(*x*).

При решении уравнения (1) будем считать, что функция *f*(*x*) удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема. **Если функция *f*(*x*):**

1) непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) принимает значения разных знаков на концах этого отрезка, т.е. $f(a)\cdot f(b)<0$**,**

то внутри этого отрезка существует по меньшей мере один корень уравнения (1) (рис. 2.1).

Замечание. **Если функция *f*(*x*) непрерывна внутри отрезка [*a,b*] и производная *f*(*x*) существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (*a,b*), то корень уравнения (1) будет заведомо единственным (рис. 2.2).**

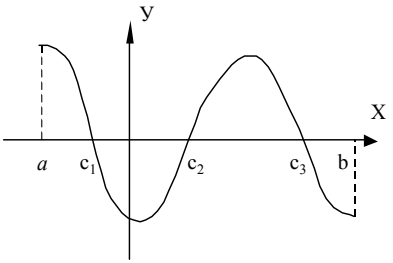


Рис. 2.1.

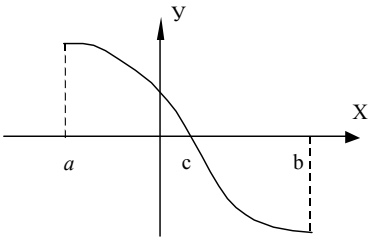


Рис. 2.2.

§ 2. Отделение корней

Первый этап численного решения уравнения (1) состоит в отделении корней**, т.е. в установлении «тесных» промежутков, содержащих только один корень. Если каким либо образом можно установить, что функция $f(x)$ является строго монотонной, т.е. $f'(x) < 0$ или $f'(x) > 0$ при $a < x < b$, то на отрезке $[a,b]$ содержится единственный корень. Если монотонность функции $f(x)$ установить не удалось, то во многих случаях отделение корней можно произвести графически. Принимая во внимание, что действительные корни уравнения (1) – это точки пересечения графика функции $f(x)$ с осью абсцисс, достаточно построить график $f(x)$ и отметить на оси Ox отрезки, содержащие по одному корню.**

Построение графиков часто удается сильно упростить, заменив уравнение (1) равносильным ему уравнением

$$f_1(x) = f_2(x). \qquad (2)$$

В этом случае строим графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а потом по оси Ox отмечаем отрезки, локализирующие абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 1.**Отделить корни уравнения $\sin 2x - \ln x = 0$.**

Решение.

Преобразуем уравнение к виду sin 2*x*= ln *x*. Построим графики функций sin 2*x* и ln *x* (рис. 2.3). Из графика следует,

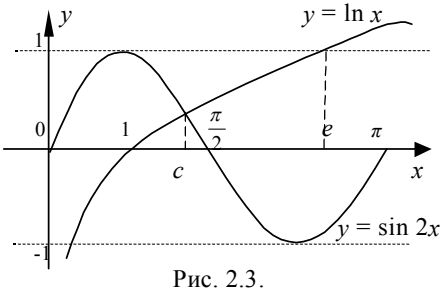


Рис. 2.3.

что уравнение имеет корень, принадлежащий отрезку $\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$.

Используя теорему, можно сузить отрезок. Находим

***f*(1) = sin 2- ln 1= 0,909,**

***f*(1,5) = sin 3- ln 1,5= -0,26.**

Следовательно, на отрезке [1; 1,5]содержится единственный корень уравнения sin 2*x*- ln *x*= 0.

§ 3. Метод половинного деления (бисекции)

Пусть уравнение (1) имеет на отрезке [*a,b*] единственный корень, причем функция *f(x)* на этом отрезке непрерывна. Разделим отрезок [*a,b*] пополам точкой $c=\frac{a+b}{2}$. Если *f*(*c*) ≠ 0, то возможны два случая: либо *f*(*x*) меняет знак на отрезке [*a,c*] (рис. 2.4), либо на отрезке [*c,b*] (рис. 2.5). Выбирая в каждом случае тот из отрезков, на котором функция меняет знак, и продолжая прцесс

половинного деления дальше, можно дойти до сколь угодно малого отрезка, содержащего корень уравнения. Процесс продолжаем до тех пор, пока длина промежутка, в котором заключен корень *c*, не окажется меньше допустимой погрешности.

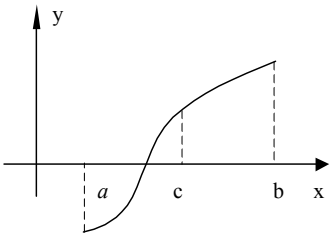


Рис. 2.4.

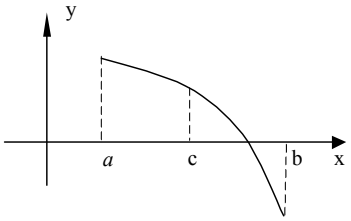


Рис. 2.5.

Достоинством метода является то, что он обязательно приводит к цели. При этом всегда

$$|c - x_n| \le \frac{1}{2^n}(b-a) \qquad \textbf{(3)}$$

Неравенство (3) позволяет оценить число шагов *n*, достаточное для достижения $|c - x_n| \le \varepsilon$ **. Из условия** $\varepsilon \ge \frac{b-a}{2^n}$ **находим** $2^n \ge \frac{b-a}{\varepsilon}$**.**

Логарифмируя это неравенство по основанию 2, получаем $n \ge \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$**.**

Полученное неравенство позволяет заранее определить число шагов, необходимых для обеспечения требуемой точности.

Пример 2. **Методом половинного деления решить уравнение $x^3 + 2x - 7 = 0$ с точностью до 0,01.**

Решение.

Интервал изоляции действительного корня можно определить графически, построив графики функций $y = x^3$ и $y = -2x + 7$ (рис. 2.6).

Единственная точка пересечения графиков находится в интервале (1; 2). Следовательно, искомый корень заключен в этом интервале, т.е. можно принять $a = 1$, $b = 2$. Найдем значения функции на концах интервала: $f(1) = -4 < 0$; $f(2) = 5 > 0$. Разделив интервал (1; 2) пополам, получим $c_1 = (a + b)/2 = (1 + 2)/2 = 1,5$ и вычислим $f(c_1) = f(1,5) = -0,625 < 0$. Следовательно, искомый корень находится в интервале (1,5; 2).

Примем $c_2 = 1,7$; $f(c_2) = f(1,7) = 1,313 > 0$. Мы видим, что искомый корень находится в интервале (1,5; 1,7). Примем теперь $c_3 = 1,6$; $f(c_3) = f(1,6) = 0,296 > 0$. В результате интервал изоляции удалось сузить, и искомый корень находится в интервале (1,5; 1,6). Продолжая этот процесс, имеем

$c_4 = 1,55$; $f(c_4) = f(1,55) = -0,176 < 0$;

интервал изоляции (1,55; 1,6);

$c_5 = 1{,}57$; $f(c_5) = f(1{,}57) = 0{,}010 > 0$;

интервал изоляции (1,55; 1,57);

$c_6 = 1{,}56$; $f(c_6) = f(1{,}56) = -0{,}84 < 0$;

интервал изоляции (1,56; 1,57);

$c_7 = 1{,}565$; $f(c_7) = f(1{,}565) = -0{,}037 < 0$;

интервал изоляции (1,565;1,57);

$c_8 = 1{,}568$; $f(c_8) = f(1{,}568) = -0{,}009 < 0$.

Таким образом, мы получили интервал (1,568; 1,57). Отсюда видно, что с точностью до 0,01 искомый корень $x = 1{,}57$.

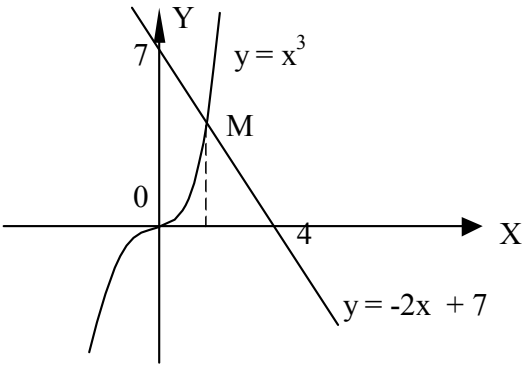


Рис. 2.6.

§ 4. Метод хорд

Пусть на отрезке [*a,b*] изоляции корня уравнения (1) выполняются условия:

1) **функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ непрерывны;**
2) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
3) функции $f'(x)$ и $f''(x)$ не меняют своего знака.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Точки графика $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ соединим хордой. За приближенное значение искомого корня примем абсциссу x_1 точки пересечения хорды AB с осью Ox (рис. 2.7). Это приближенное значение найдем по формуле

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)},$$

где x_1 принадлежит интервалу (a,b). Если $f(x_1) < 0$, то повторим

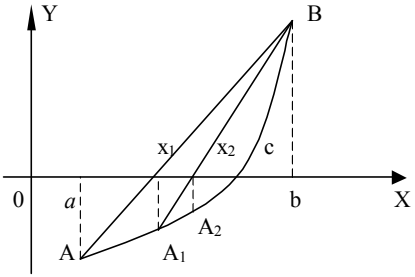


Рис. 2.7.

тот же прием для отрезка $[x_1, b]$, соединив точки $A_1(x_1, f(x_1))$ и $B(b, f(b))$, получим в точке пересечения хорды с осью Ox второе приближение x_2, которое вычислим по формуле

$$x_2 = x_1 - \frac{(b-x_1)f(x_1)}{f(b)-f(x_1)} \qquad \text{и т.д.}$$

Формулы для вычисления следующего приближения по предыдущему имеют вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-x_n)f(x_n)}{f(b)-f(x_n)}, \quad x_0 = a, \text{ если } f(a)\cdot f(x_1) \geq 0,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n-a)f(x_n)}{f(x_n)-f(a)}, \quad x_0 = b, \text{ если } f(a)\cdot f(x_1) < 0.$$

Последовательность чисел $a, x_1, x_2, \ldots$ стремится к искомому корню уравнения $f(x) = 0$. Вычисление приближенных

значений корней уравнения следует вести до тех пор, пока не перестанут изменятся те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Для оценки точности приближения к истинному значению корня можно пользоваться формулой:

$$| c - x_n | \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} \cdot | x_n - x_{n-1} |,$$

где с точное значение корня; x_{n-1} и x_n- приближения к нему, полученные на (n -1) - м и n- м шагах, M_1- наибольшее значение $|f'(x)|$, m_1 – наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Если отрезок $[a,b]$ столь узок, что $M_1 \leq 2m_1$, то

$$| c - x_n | \leq | x_n - x_{n-1} |$$

В этом случае вычисления можно прекратить при $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon$, где ε- допустимая абсолютная погрешность вычисления корня.

Пример 3. Методом хорд найти положительный корень уравнения $x^4 - 2x - 4 = 0$ с точностью до 0,01.

Решение.

Положительный корень заключен в промежутке (1; 1,7), так как $f(1) = -5 < 0$, а $f(1,7) = 0,952 > 0$.

Найдем первое приближенное значение корня:

$$x_1 = 1 - \frac{(1,7 - 1) \cdot f(1)}{f(1,7) - f(1)} = 1,588.$$

Так как $f(1{,}588) = -0{,}817 < 0$, то снова применим метод хорд к промежутку (1,588; 1,7):

$$x_2 = 1{,}588 - \frac{(1{,}7 - 1{,}588)\cdot f(1{,}588)}{f(1{,}7) - f(1{,}588)} = 1{,}639; \quad f(1{,}639) = -0{,}051 < 0.$$

Найдем третье приближенное значение:

$$x_3 = 1{,}639 - \frac{(1{,}7 - 1{,}639)\cdot f(1{,}639)}{f(1{,}7) - f(1{,}639)} = 1{,}642; \quad f(1{,}642) = -0{,}016 < 0.$$

Найдем четвертое приближенное значение:

$$x_4 = 1{,}642 - \frac{(1{,}7 - 1{,}642)\cdot f(1{,}642)}{f(1{,}7) - f(1{,}642)} = 1{,}643; \quad f(1{,}643) = 0{,}004 > 0.$$

Следовательно, с точностью до 0,01 искомый корень равен 1,64.

§ 5. Метод касательных (Ньютона).

Метод касательных является наиболее употребительным при приближенном решении уравнений, так как дает довольно быструю сходимость процесса вычисления к нужному результату.

Пусть действительный корень уравнения (1) изолирован на отрезке $[a,b]$. Будем предполагать, что все ограничения, сформулированные в § 4 относительно $f(x)$, сохраняют силу и сейчас.

Выберем на отрезке $[a,b]$ такое число x_0, при котором $f(x_0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x_0)$, т. е. $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$.

Замечание. В качестве x_0 может быть принят тот из концов отрезка $[a,b]$, в котором соблюдено это условие.

Проведем в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$. За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox (рис.2.8). Приближенное значение корня найдем по формуле $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Применив этот прием вторично в точке $M_1(x_1, f(x_1))$, найдем $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ и т.д.

Следующие приближения производятся по формуле $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

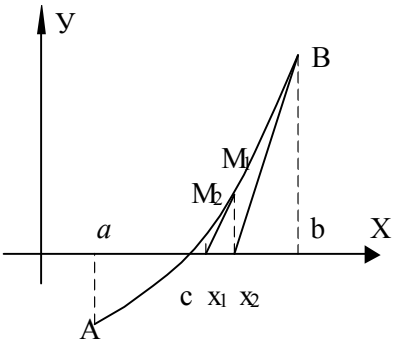


Рис. 2.8.

Полученная таким образом последовательность $x_0, x_1, x_2 \ldots$ имеет своим пределом искомый корень.

Замечание. Если для функции $f(x)$ не выполняется ограничение (3) §4, т.е. $f''(x)$ меняет знак (внутри интервала (a, b) есть точка перегиба), то способ касательных может дать

приближенное значение корня, лежащее вне интервала (*a, b*) (рис. 2.9).

Для оценки погрешности можно пользоваться формулой

$|c - x_n| \le \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2$, где

M_2 – наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке $[a,b]$;

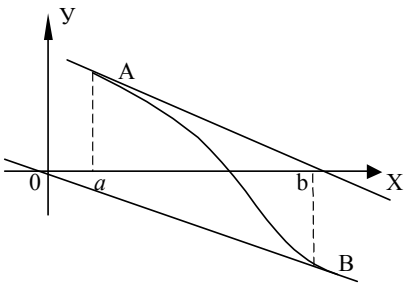


Рис. 2.9.

m_1 - наименьшее значение $|f'(x)|$ на отрезке $[a,b]$.

Модифицированный метод Ньютона

Если производная $f'(x)$ мало изменяется на отрезке $[a,b]$, то в формуле Ньютона можно положить $f'(x_n) \approx f'(x_0)$. Тогда получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \qquad (4)$$

Формула (4) избавляет от необходимости вычислять каждый раз значения производной $f'(x)$ в каждой точке x_n .

Геометрически модифицированный метод Ньютона означает, что касательные в точках $M_n(x_n, f(x_n))$ заменяются прямыми, параллельными, касательной к кривой $y = f(x)$ в ее фиксированной точке $M_0(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.10).

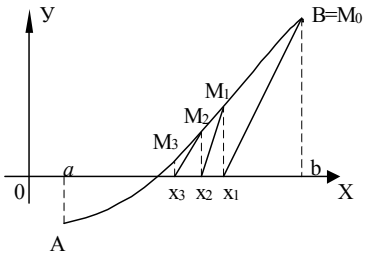


Рис. 2.10

Пример 4. Решить предыдущий пример методом касательных.

Решение.

Здесь $f(x) = x^4 - 2x - 4, \quad f'(x) = 4x^3 - 2, \quad f''(x) = 12x^2$.

Так как $f(x)$ и $f''(x)$ при $x_0 = 1{,}7$ имеют один и тот же знак, а именно $f(1{,}7) = 0{,}952 > 0$ и $f''(1{,}7) > 0$, то воспользуемся формулой $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$, где $f'(1{,}7) = 4 \cdot 1{,}7^3 - 2 = 17{,}652$.

Тогда $x_1 = 1{,}7 - 0{,}952/17{,}652 = 1{,}646$.

Применим снова способ касательных. Имеем

$x_2 = x_1 - f(x_1)/f'(x_1)$, где $f(x_1) = f(1{,}646) = 0{,}048$,

$f'(1{,}646) = 15{,}838$; значит,

$x_2 = 1{,}646 - 0{,}048/15{,}838 = 1{,}643$.

Аналогичным образом находим $f(1{,}643) = 0{,}004$;

$f'(1{,}643) = 15{,}740,$ т.е.

$x_3 = x_2 - f(x_2)/f'(x_2) = 1{,}643 - 0{,}004/15{,}740 = 1{,}6427.$

Следовательно, искомый корень с точностью до 0,01 равен 1,64.

§ 6. Комбинированный метод.

Метод хорд и метод касательных дают приближение к корню с разных сторон. Поэтому обычно бывает выгодно комбинировать их, т.е. применять оба метода одновременно, благодаря чему уточнение корня может быть получено быстрее и создается возможность контролировать вычисления.

Пусть требуется найти действительный корень уравнения $f(x) = 0$, изолированный на отрезке $[a,b]$. Предположим что $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, а $f'(x)$ и $f''(x)$ ссохраняют определенный знак на отрезке изоляции. Выберем на отрезке $[a,b]$ такую точку x_0, что $f(x_0)$ и $f''(x_0)$ имеют одинаковые знаки, т.е. $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$

Воспользуемся формулами методов хорд и касательных:

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\ ; \qquad x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Величины x_{11} и x_{12} принадлежат промежутку изоляции, причем $f(x_{11})$ и $f(x_{12})$ имеют разные знаки.

Построим новую пару приближений к корню:

$$x_{21} = x_{11} - \frac{f(x_{11})}{f'(x_{11})}; \qquad x_{22} = x_{11} - \frac{(x_{12} - x_{11})f(x_{11})}{f(x_{12}) - f(x_{11})}.$$

Точки x_{21} и x_{22} на числовой оси расположены между точками x_{11} и x_{12}, причем $f(x_{21})$ и $f(x_{22})$ имеют разные знаки.

В результате окончательно получаем

$$x_{(n+1)1} = x_{n1} - \frac{f(x_{n1})}{f'(x_{n1})}; \quad x_{(n+1)2} = x_{n1} - \frac{(x_{n2} - x_{n1})f(x_{n1})}{f(x_{n2}) - f(x_{n1})}.$$

Каждая из последовательностей $x_{11}, x_{21}, x_{31}, \ldots x_{n1}\ldots$; $x_{12}, x_{22}, x_{32}, \ldots x_{n2}, \ldots$ стремится к искомому корню, причем одна из последовательностей монотонно возрастает, а другая- монотонно убывает. Здесь мы приближаемся к корню сразу с обеих сторон, поэтому разность $x_{n2} - x_{n1}$ позволяет непосредственно судить о качестве полученных приближений, и никакие формулы для оценки погрешности здесь не нужны.

Пример 5. Используя комбинированный метод хорд и касательных, найти приближенное значение корня уравнения $x^3 + x^2 - 11 = 0$, изолированного в промежутке (1, 2), с точностью до 0,001.

Решение.

Имеем $f(x) = x^3 + x^2 - 11$, $f'(x) = 3x^2 + 2x$, $f''(x) = 6x + 2$. В указанном промежутке $f''(x) > 0$, поэтому за первое приближение в методе касательных берем $x_0 = 2$, так как $f(2) = 1 > 0$;

$$x_{11} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1}{16} = 1{,}9375 \approx 1{,}94;$$

$$x_{12} = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)} = 1 - \frac{(2-1)(-9)}{1-(-9)} = 1 + \frac{9}{10} = 1{,}9\,.$$

Искомый корень принадлежит промежутку (1,9; 1,94); имеем $f(1{,}9) = -0{,}531$; $f(1{,}94) = 0{,}065$; $f'(1{,}94) = 15{,}172$;

$$x_{21} = 1{,}94 - \frac{0{,}065}{15{,}172} = 1{,}936; \qquad x_{22} = 1{,}9 - \frac{0{,}04 \cdot (-0{,}531)}{0{,}065 + 0{,}531} = 1{,}936.$$

Так как значения x_{21} и x_{22}, вычисленные с точностью до 0,001, совпали, то приближенное значение корня $\bar{x}$, вычисленное с точностью до 0,001, есть 1,936.

§ 7. Метод итерации

Пусть уравнение $f(x) = 0$ заменено равносильным

$$x = \varphi(x) \qquad (5),$$

где $\varphi(x)$ – непрерывная функция. Пусть c – корень уравнения (5), а x_0 – некоторое число, которое назовем **начальным приближением** к корню c.

Последовательность приближений строим следующим образом: $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), \ldots, x_{n+1} = \varphi(x_n)$.

Если эта последовательность сходящаяся, т.е. при $n \to \infty$ имеет конечный предел $\lim x_n = c$, то c является корнем уравнения (5), а, следовательно, и уравнения $f(x) = 0$, в силу их равносильности.

Процесс построения итерационной последовательности имеет простую геометрическую интерпретацию.

Последовательность приближений может быть как

сходящейся, так и расходящейся. На рис. 2.11 изображен случай расходящейся последовательности, на рис. 2.12 – сходящейся.

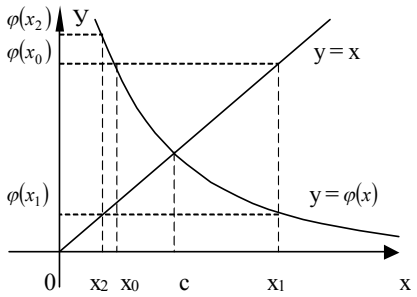


Рис. 2.11

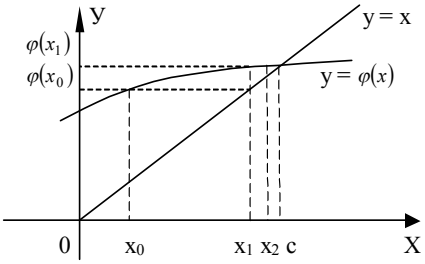


Рис. 2.12

Как видно из рис. 2.11, применение метода итераций может и не привести к уточнению корня. Достаточные условия сходимости итерационного процесса выясняются следующей теоремой.

Теорема. Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a, b]$ и выполнены условия:

1) $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на (a, b);
2) $\varphi(x) \in [a,b]$ для всех $x \in [a,b]$;
3) существует такое вещественное число q, что $|\varphi'(x)| \le q < 1$ для всех $x \in [a,b]$.

Тогда итерационная последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$ сходится при любом начальном приближении $x_0 \in [a,b]$.

Замечание. Условия теоремы не являются необходимыми. Это означает, что итерационная последовательность может оказаться сходящейся и при невыполнении этих условий.

Как следует из теоремы, при выполнении ее условий итерационная последовательность сходится при любом выборе начального приближения x_0. Отсюда следует, что полученное в итерационном процессе n- е приближение можно считать начальным. Это означает, что если в процессе вычисления приближений допускались ошибки, то они не влияют на окончательный результат. Указанное свойство метода итераций делает его одним из самых надежных методов решения уравнений.

Для оценки погрешности приближения x_n служат следующие формулы:

$$| c - x_n | \le \frac{q}{1-q} | x_n - x_{n-1} | \le \varepsilon ; \qquad | x_n - x_{n-1} | \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q}.$$

Из последнего неравенства следует, что для нахождения корня уравнения $x = \varphi(x)$ методом итераций с точностью ε нужно продолжать итерации до тех пор, пока модуль разности между последними соседними приближениями остается больше числа $\frac{\varepsilon(1-q)}{q}$.

Преобразование уравнения к итерационному виду.

Уравнение $f(x) = 0$ может быть приведено к виду $x = \varphi(x)$ многими способами, однако это требуется сделать так, чтобы для функции $\varphi(x)$ выполнялись условия (1)– (3) теоремы. Как правило, наибольшую трудность при этом вызывает условие (3). В некоторых случаях полезно использовать следующий прием:

уравнение $f(x) = 0$ заменяем эквивалентным $x = x - m\,f(x)$,

где m – отличная от нуля константа. В этом случае

$$\varphi(x) = x - m \cdot f(x)$$

Число m выбираем так, чтобы $\varphi'(x) = 1 - m\,f(x)$ была малой по абсолютной величине в окрестности точки x_0 (например, можно положить $1 - m\,f'(x_0) = 0$).

Пример 6. Привести уравнение $2x - \ln x - 4 = 0$ при начальном приближении корня $x_0 = 2{,}5$ к итерационному виду.

Решение.

Здесь $f(x) = 2x - \ln x - 4$; $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$. Пишем эквивалентное уравнение

$$x = x - m(2x - \ln x - 4).$$

В качестве m выберем число, близкое к корню уравнения

$$1 - m\left(2 - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=2{,}5} = 0, \quad \text{т.е. к} \quad \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Пусть $m = 0{,}5$. Исходное число приводится к виду

$x = x - 0{,}5(2x - \ln x - 4)$ или $x = 2 + 0{,}5 \ln x$.

Пример 7. Вычислить методом итераций с точностью до 0,01 корень уравнения $2x - \ln x - 4 = 0$.

Решение.

$x = 2 + 0{,}5 \ln x$, $x_0 = 2{,}5$.

$x_1 = 2 + 0{,}5 \ln 2{,}5 \approx 2{,}458$;

$x_2 = 2 + 0{,}5 \ln 2{,}458 \approx 2{,}450$;

$x_3 = 2 + 0{,}5 \ln 2{,}450 \approx 2{,}448$;

$$x_4 = 2 + 0{,}5 \ln 2{,}448 \approx 2{,}448.$$

Итак, $c \approx 2{,}45$ (процесс итераций можно прекратить, так как третий десятичный знак закрепился).

Проведем оценку погрешности. Здесь

$$\varphi(x) = 2 + 0{,}5 \ln x \quad \text{и} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{2x}.$$

Считая, что все приближения x_n лежат на отрезке $[2{,}4;2{,}6]$, получим: $q = \max\left|\varphi'(x)\right| = \dfrac{1}{2 \cdot 2{,}4} = 0{,}21.$

Следовательно, $\dfrac{\varepsilon(1-q)}{q} = \dfrac{0{,}01 \cdot (1-0{,}21)}{0{,}21} \approx 0{,}038.$

Учитывая, что $\left|x_3 - x_2\right| \le 0{,}002$, можно считать, что $c \approx 2{,}45$.

Упражнения и задачи.

2.1. Определить графически интервалы изоляции действительных корней уравнения $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0.$

2.2. Определить графически интервалы изоляции действительных корней уравнения $x^3 - 12x + 1 = 0.$

2.3. Методом половинного деления решить уравнение $x + e^x = 0.$

Методом половинного деления отделить действительные корни уравнений и с помощью метода хорд вычислить их с точностью до 0,01:

2.4. $x^3 - x + 1 = 0.$

2.5. $x^4 + 0{,}5 - 1{,}55 = 0.$

2.6. $x^2 - 4x - 1 = 0.$

Методом хорд и касательных решить с точностью до 0,01 уравнения:

2.7. $x^4 + 3x - 20 = 0.$

2.8. $x^3 - 2x - 5 = 0.$

2.9. $x^4 - 3x + 1 = 0.$

2.10. $x^3 + 3x + 5 = 0.$

2.11. $x^4 + 5x - 7 = 0$ (применить комбинированный метод хорд и касательных).

2.12. Применив дважды метод хорд, найти приближенное значение действительного корня уравнения $x^3 - 10x + 5 = 0,$ изолированного в промежутке $[0; 0{,}6]$. Приближенные значения x_1 и x_2 вычислить с двумя знаками после запятой. Оценить погрешность приближенного значения x_2.

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни уравнений.

2.13. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 10x$ (с точностью до 0,001).

2.14. $x \lg x = 1$ (с точностью до 0,0001).

2.15. $\cos x \cdot \operatorname{ch} x = 1$ (с точностью до 0,001) (для положительного корня).

2.16. $x + e^x = 0$ (с точностью до 0,00001).

2.17. $x \cdot \operatorname{th} x = 1$ (с точностью до 0,000001).

Используя найденные графическим путем начальные приближения, итерационным методом вычислить с точностью до 0,01 действительные корни уравнений:

2.18. $x^3 - 5x + 0{,}1 = 0$

2.19. $4x = \cos x$.

Найти графически начальные приближения и вычислить с точностью до 0,001 действительные корни уравнений:

2.20. $x = \sqrt[3]{5 - x}$.

2.21. $x = 2 + \sqrt[4]{x}$.

2.22. $x^3 + 60x - 80 = 0$.

2.23. $x = 10 \lg x$.

2.24. $x = 2 - \lg x$.

2.25. $x^2 = - \ln x$.

2.26. $x^2 = \ln(x+1)$.

2.27. $x^2 = e^x + 2$.

2.28. $x + \sin x - 1 = 0$.

2.29. $x - \cos x = 0$.

2.30. $x^2 = \cos x$.

2.31. $x - 0{,}1\sin x = 2$.

2.32. С точностью до 0,001 найти три первых положительных корня уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

2.33. С точностью до 0,001 найти два положительных корня уравнения $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$.

2.34. Определить приближенное значение корня уравнения $x^5 - x - 0{,}2 = 0$, заключенное в интервале (1; 1,1).

2.35. С точностью до 0,01 найти действительный корень уравнения $x^3 - 5 = 0$.

Вычислить с точностью до 0,01 действительные корни уравнений:

2.36. $x \cdot e^x = 2$.

2.37. $x \ln x = 0{,}8$.

2.38. Найти минимум функции $y = x^4 + x^2 + x + 1$ с точностью до 0,001.

2.39. Найти максимум функции $y = x + \ln x - x^3$ с точностью до 0,001.

2.40. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 + 3\cos x$ в интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ с точностью до 0,01.

2.41. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x - e^{x^2}$ в интервале (0,2; 0,5) с точностью до 0,001.

2.42. Найти координаты точки перегиба линии

$$y = \frac{e^x}{10}(x^3 - 6x^2 + 19x - 30)$$ с точностью до 0,01.

2.43. Найти координаты точки перегиба линии

$y = 6x^2 \ln x + 2x^3 - 9x^2$ с точностью до 0,01.

2.44. Найти с точностью до 0,01 кривизну линии $y = \frac{1}{x^2}$ в точке ее пересечения с прямой $y = x - 1$.

2.45. На линии $y = \ln x$ найти с точностью до 0,001 координаты точки, в которой радиус кривизны данной линии в три раза больше абсциссы этой точки.

Ответы:

2.1. (0,1), (2,3), (6,7).

2.2. (-4; -3), (0, 1), (3,4).

2.3. –0,56.

2.4. –1,325.

2.5. 1,01

2.6. –1,86; -0,25; 2,11.

2.7. 1,94.

2.8. 2,09.

2.9. 0,33; 1,30.

2.10. –1,15.

2.11. 1,11

2.12. x_2=0,51, $\varepsilon < 0{,}0006$.

2.13. 0,472; 9,999.

2.14. 2,5062.

2.15. 4,730; 7,853.

2.16. –0,56715.

2.17. $\pm$ 1,199678.

2.18. 0,02.

2.19. 0,24.

2.20. 1,5160.

2.21. 3,3532.

2.22. 1,2970.

2.23. 1,3713.

2.24. 1,7556.

2.25. 0,6529.

2.26. 0; 0,7469.

2.27. –1,4916.

2.28. 0,5110.

2.29. 0,7391.

2.30. $\pm$ 0,8241.

2.31. 2,087.

2.32. 4,493; 7,725; 10,904.

2.33. 2,081; 5,940.

2.34. 1,045.

2.35. 1,71.

2.36. 0,84

2.37. 1,64.

2.38. 0,785.

2.39. 0,073.

2.40. (3,00; 2,46).

2.41. (-0,773; -0,841).

2.42. (1,38; 4,99).

2.43. (0,57; -3,62).

2.44. 0,78.

2.45. (2,327; 0,845).

ГЛАВА 3
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Постановка задачи.

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами y и x, описывающая количественную сторону данного явления; при этом функция $y = f(x)$ остается нам неизвестной, но на основании эксперимента установлены значения этой функции y_0 , y_1 , y_2 , … , y_n при некоторых значениях аргумента x_0 , x_1 , x_2 , … , x_n , принадлежащих отрезку $[a , b]$.

Задача заключается в том, чтобы найти функцию, по возможности более простую, с точки зрения вычислительной (например, многочлен). Которая представляла бы неизвестную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a , b]$ точно или приближенно. В этом случае нахождение приближенной функции называют **интерполяцией** (или **интерполированием**), а точки x_0 , x_1 ,…, x_n **узлами интерполяции**.

Задача интерполирования функции формулируется так: для данной функции $f(x)$ найти многочлен $P(x)$ степени не выше n , который при заданных значениях x_0 , x_1 , … , x_n принимал бы значения $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, … , $y_n=f(x_n)$.

Геометрически это означает, что нужно найти

алгебраическую кривую вида $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, проходящую через заданную систему точек $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, …, $M_n(x_n, y_n)$ (рис. 3.1).

Основой для применения многочленов в качестве приближений к непрерывным функциям является теорема Вейерштрасса:

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что во всех точках указанного отрезка выполняется неравенство

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

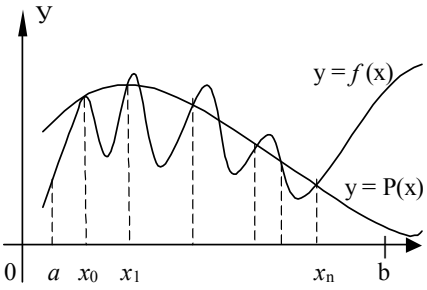


Рис. 3.1.

Необходимость в построении интерполяционного многочлена может встретиться в различных случаях. Например, если таблица значений функции $f(x)$ составлена в результате наблюдений за ходом некоторого процесса и промежуточные значения функции неизвестны или функция задана в виде кривой, полученной в самопишущем приборе, многочлен $P(x)$ дает приближенное аналитическое выражение функции $f(x)$. В других случаях известное аналитическое выражение функции $f(x)$ может оказаться столь сложным, что для выполнения различных математических операций над этой функцией, например, дифференцирования или интегрирования,

оказывается удобным заменить ее многочленом $P(x)$. различают интегрирование в узком смысле, когда x находится между x_0 и x_n, и экстраполирование, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$.

§ 2. Интерполяционная формула Лагранжа

Пусть в результате эксперимента получены значения функции $y = f(x)$:

$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$

В качестве искомого многочлена возьмем многочлен n- ой степени вида:

$$P(x) = c_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + c_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \quad (1)$$
$$+c_2(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n)+\ldots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

и определим коэффициенты $c_0, c_1,\ldots,c_n$ так, чтобы выполнялись условия:

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_1) = y_1,\ldots, P(x_n) = y_n. \quad (2)$$

Положим в формуле (1) $x = x_0$; тогда принимая во внимание равенство (2), получим

$$y_0 = c_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n),$$

откуда $$c_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)},$$

Затем, положив $x = x_1$, получим

$$y_1 = c_1(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)$$

откуда $c_1 = \dfrac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)}$.

Таким же образом найдем

$$c_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)},$$

$$c_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в формулу (1), получим

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} y_1 + ...$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})} y_n$$

Эта формула называется **интерполяционной формулой Лагранжа**.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функция *f(x)* имеет все производные до (*n + 1*)- го порядка на отрезке [*a, b*]. Тогда для каждого $x \in [a,b]$ найдется по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a,b)$, для которой справедливо равенство:

$$| R(x) | = | f(x) - P(x) | = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Обозначая через $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b} | f^{(n+1)}(x) |$, получим следующую оценку максимальной абсолютной погрешности

интерполяционного многочлена Лагранжа (без учета влияния ошибок исходных данных и ошибок округления):

$$| R(x) | \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} | (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) | .$$

Пример. Из эксперимента получены такие значения функции $y = f(x)$: $y_0 = 3$ при $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ при $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ при $x_2 = -4$. Требуется представить приближенно функцию $y = f(x)$ многочленом 2- й степени.

Решение.

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4 ,$$

или $P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}$.

Используя обозначение $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, формуле Лагранжа можно придать более сжатый вид. Продифференцируем $\Pi_{n+1}(x)$ по x:

$\Pi'_{n+1}(x) = (x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n) + (x - x_0)(x - x_2)\cdot\ldots\cdot(x - x_n) + \ldots$

$\ldots + (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_{n-1})$.

При $x = x_0$ имеем $\Pi'_{n+1}(x_0) = (x_0 - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_0 - x_n)$,

при $x = x_1$: $\Pi'_{n+1}(x_1) = (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1 - x_n)$,

…

при $x = x_n$: $\Pi'_{n+1}(x_n) = (x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n - x_{n-1})$.

Тогда формула Лагранжа принимает вид:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k \cdot \Pi_{n+1}(x)}{\Pi'_{n+1}(x_k)(x - x_k)}.$$

Непосредственное применение формулы Лагранжа приводит к большому числу однотипных вычислений. Организация вычислений существенно улучшится, если пользоваться специальной вычислительной схемой.

В таблице 2 показано построение такой схемы для четырех узлов. Таблица составляется заново для каждого нового аргумента x .

Заполнение таблицы начинается с того, что вычисляются и заносятся в соответствующие клетки все элементарные разности. Потом вычисляются произведения $p_0, p_1, \ldots$ разностей по строкам:

$$p_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3),$$
$$p_0 = (x_1 - x_0)(x - x_1)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3),$$
$$p_0 = (x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x - x_2)(x_2 - x_3),$$
$$p_0 = (x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x - x_3),$$

Таблица 2.

x	x_0	x_1	x_2	x_3	p_k	y_k	y_k/p_k
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$x_0 - x_3$	p_0	y_0	y_0/p_0
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$	p_1	y_1	y_1/p_1
x_2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$x_2 - x_3$	p_2	y_2	y_2/p_2
x_3	$x_3 - x_0$	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x - x_3$	p_3	y_3	y_3/p_3

$$S = \sum(y_k/p_k)$$

Легко увидеть, что произведение, обозначенное в таблице через p_k – это знаменатель в формуле Лагранжа, т.е.

$p_k = \Pi'_{n+1}(x_k) \cdot (x - x_k)$ $\qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$

С учетом этого обозначения формула Лагранжа имеет вид:

$$P(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{p_k}.$$

Все необходимые значения последовательно получаются в таблице. Сумма S образуется сложением элементов последнего столбца. Для получения окончательного значения $P(x)$ достаточно умножить S на произведение $\Pi_{n+1}(x)$ (произведение диагональных разностей таблицы).

Пример 1. Имеется таблица функции:

x	0,41	1,55	2,67	3,84
y	2,63	3,75	4,87	5,03

Требуется получить значение этой функции в точке $x = 1{,}91$.

Решение. Составляем вычислительную схему:

x=1,91	0,41	1,55	2,67	3,84	p_k	y_k	y_k/p_k
0,41	1,50	-1,14	-2,26	-3,43	-13,26	2,63	-0,1983
1,55	1,14	0,36	-1,12	-2,29	1,053	3,75	3,561
2,67	2,26	1,12	-0,76	-1,17	2,251	4,87	2,163
3,84	3,43	2,29	1,17	-1,93	-17,74	5,03	-0,2835

$S = 5{,}2422$

Для нахождения окончательного результата сумма значений последнего столбца умножается на произведение диагональных разностей: $f(1{,}91) \approx 0{,}79207 \cdot 5{,}2422 \approx 4{,}15$.

Пример 2. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа ln 100,5 по известным значениям ln 100, ln 101, ln 102, ln 103 ?

Решение.

Абсолютная погрешность формулы Лагранжа при $n = 3$ имеет вид $\left|R(x)\right| \le \frac{M_4}{4!}\left|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\right|,$

В нашем случае x_0=100, x_1=101, x_2=102, x_3=103, x=100,5.

Так как

$f(x) = \ln x$, то $M_4 = \max\limits_{100 \le x \le 103}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max\limits_{100 \le x \le 103}\left|-\frac{6}{x^4}\right| = \frac{6}{100^4}$.

Таким образом, $\left|R_3(100{,}5)\right| \le \frac{6}{100^4 \cdot 4!} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 = 0{,}23 \cdot 10^{-8}.$

§ 3. Интерполяционная формула Ньютона.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равностоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h = x_{k+1} - x_k$ (k = 0, 1, 2, …) является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисления по этим формулам) заметно упрощается.

Пусть функция задана таблицей с постоянным шагом:

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	…	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	…	y_n

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются **конечными разностями первого порядка:** $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$.

Из конечных разностей первого порядка образуются **конечные разности второго порядка:**

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, $\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \ldots, \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2}$,

…

$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$ - конечные разности n-го порядка.

По заданной таблице функции можно составить таблицу конечных разностей:

x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$	
		Δy_3		
x_4	y_4			

Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0$,

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = \; y_3 - y_2 - (y_2 - y_1) = y_3 - 2y_2 + y_1$,

и т.д.

Аналогично, для разностей третьего порядка:

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 .$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$\Delta^n y_0 = y_n - n\, y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\, y_{n-2} - \ldots + (-1)^n y_0 .$$

Будем искать интерполяционный многочлен в виде $P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + a_n(x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})$.

Это многочлен n–й степени. Значения коэффициентов a_0 , a_1, …, a_n найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах.

Полагая, что $x = x_0$, находим $y_0 = P(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, придавая x значение x_1 , получаем:

$$y_1 = P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \text{ откуда } a_1 = \frac{\Delta y_0}{h} .$$

Таким же образом найдем

$$y_2 = P(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

$$y_2 - y_0 - 2\Delta y_0 = 2h^2 a_2 , \text{ или } y_2 - 2y_1 + y_0 = 2h^2 a_2 ,$$

откуда

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}$$

Далее, проведя аналогичные выкладки, можно получить:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3};$$

в общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}.$$

Подставим полученные значения коэффициентов a_0, a_1 … в выражение для многочлена:

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Практически эта формула применяется в несколько ином виде. Положим $\frac{x - x_0}{h} = t$, т.е. $x = x_0 + t\,h$.

Тогда: $\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1$,

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{y} = t - 2 \qquad \text{и т.д.}$$

Окончательно имеем:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1`}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots$$

$$+ \frac{t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n+1)}{n!} \cdot \Delta^n y_0.$$

Эта формула называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Она применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для интерполирования

вперед. За начальное значение x_0 можно принимать любое табличное значение аргумента x. При n=1 и n=2 из формулы получаем частные случаи:

линейная интерполяция $P_1(x) = y_0 + t\Delta y_0$;

квадратичная интерполяция $P_2(x) = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0$.

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад – вторая интерполяционная формула Ньютона, которая ищется в виде:

$P(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots + a_n(x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_1)$.

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах:

$$a_0 = y_n, \quad a_1 = \frac{\Delta y_n}{h}, \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}, \quad \ldots, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставляя значения коэффициентов в многочлен и переходя к переменной $t = \frac{x - x_n}{h}$, получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P(x) = P(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{t(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 .$$

В силу единственности интерполяционного многочлена для фиксированного отрезка интерполирования изложение вопроса о погрешности метода одинаково годится как для многочлена Лагранжа, так и для многочлена Ньютона:

$$\left|R(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)\right|.$$

Используя подстановки $t = \frac{x-x_0}{h}$ и $t = \frac{x-x_n}{h}$ и заменяя соответствующим образом выражение для $(x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, можно получить формулы оценки погрешностей интерполирования по формулам Ньютона:

$$\left|R(x)\right| \le \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)\right|,$$

$$\left|R(x)\right| \le \frac{h^{n+1}M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left|t(t+1)\cdot\ldots\cdot(t+n)\right|.$$

При составлении интерполяционных формул Ньютона на практике можно пренебречь членами, в которых соответствующие конечные разности равны или близки к нулю. Поэтому в практических вычислениях интерполяционные формулы Ньютона обрываются на членах, содержащих такие разности, которые в пределах заданной точности можно считать постоянными.

Связь между конечными разностями и точностью интерполирования по формулам Ньютона подтверждается

следующими соображениями. При малых значениях h при и при условии непрерывности $f^{(n+1)}(x)$ можно приближенно считать

$$M_{n+1} \approx \frac{\Delta^{n+1} y}{h^{n+1}},$$

где $$\Delta^{n+1} y = \max_{0 \le m \le n} | \Delta^{n+1} y_m |,$$

т.е. максимальный из модулей конечных разностей $(n + 1)$-го порядка. При этом условии оценки остаточных членов первой и второй интерполяционных формул Ньютона получают вид:

$$| R(x) | \approx \frac{| t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n) |}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y,$$

$$| R(x) | \approx \frac{| t(t+1) \cdot \ldots \cdot (t+n) |}{(n+1)!} \Delta^{n+1} y.$$

Формулы удобны тем, что позволяют делать оценку ошибки метода интерполирования без исследования $(n + 1)$- й производной интерполируемой функции (в частности, когда аналитическое выражение $f(x)$ вовсе не известно).

Пример 3. Функция $y = \lg x$ задана таблицей. Найти $\lg 1001$.

x	1000	1010	1020	1030	1040	1050
y	3,0000000	3,0043214	3,0086002	3,0128372	3,0170333	3,0211893

Решение.

Поскольку $x = 1001$ находится в начале отрезка интерполирования, то применяем первую интерполяционную формулу Ньютона.

Составляем таблицу конечных разностей, записывая их в единицах седьмого разряда, записывая их в единицах седьмого разряда, и замечаем, что третьи разности практически постоянны:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1000	3,0000000				
		43214			
1010	3,0043214		- 426		
		42788		8	
1020	3,0086002		- 418		1
		42370		9	
1030	3,0128372		- 409		- 1
		41961		8	
1040	3,0170333		- 401		
		41560			
1050	3,0211893				

Достаточно взять $n = 3$:

$$y = y_0 + \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

Для $x = 1001$ имеем $t = 0{,}1$. Таким образом,

$lg\ 1001 = 3{,}0000000 + 0{,}1 \cdot 0{,}0043214 +$

$$+\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{2} \cdot 0{,}0000426 = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{6} \cdot 0{,}0000008 = 3{,}0004341\,.$$

Оценим остаточный член при $n = 3$:

$$\left|R(x)\right| \approx \frac{\left|t(t-1)(t-2)(t-3)\right|}{4!}\Delta^4 y + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9 \cdot 2{,}9}{24} \cdot 10^{-7} \approx 0{,}2 \cdot 10^{-8}.$$

Таким образом, остаточный член может повлиять только на восьмой десятичный знак. Заметим, что полученное значение $lg\ 1001$ полностью совпадает

со значением в семизначной таблице логарифмов.

Пример 4. Значения функции $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ даны в таблице.

x	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
y	0,0540	0,0440	0,0355	0,0283	0,0224	0,0175	0,0136

Применяя первую интерполяционную формулу Ньютона, найти $y(2{,}22)$.

Решение. Строим конечные разности функции, ограничиваясь третьей.

X	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
2,0	0,0540				
		-100			
2,1	440		15		
		-85		-2	
2,2	355		13		2
		-72		0	
2,3	283		13		-3
		-59		-3	
2,4	224		10		-7
		-49		-10	
2,5	175		0		
		-49			
2,6	136				

За x_0 принимаем ближайшее табличное значение к искомому значению $x = 2{,}22$, т.е. полагаем $x_0 = 2{,}2$. Так как шаг

$h = 0{,}1$, то $t = \dfrac{2{,}22 - 2{,}2}{0{,}1} = 0{,}2$. Отсюда получим

$$y(2{,}22) \approx 0{,}0355 + 0{,}2(-0{,}0072) + \frac{0{,}2(0{,}2-1)}{2!}0{,}0013 +$$
$$+ \frac{0{,}2(0{,}2-1)(0{,}2-2)}{3!}(-0{,}003) = 0{,}0339.$$

Это значение в точности совпадает с табличным.

Пример 5. Используя таблицу значений функции $y = \sin x$, найти $\sin 54^0$ и указать погрешность результата.

x	30^0	35^0	40^0	45^0	50^0	55^0
y	0,5000	0,5736	0,6428	0,7071	0,7660	0,8192

Решение.

Составим таблицу конечных разностей.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
30^0	0,5000				
		736			
35^0	0,5736		-44		
		692		-5	
40^0	0,6428		-49		0
		643		-5	
45^0	0,7071		-54		2
		589		-3	
50^0	0,7660		-57		
		532			
55^0	0,8192				

Мы видим, что разности третьего порядка практически постоянны. Так как $x = 54^0$ находится ближе к концу отрезка интерполяции, то применяем вторую интерполяционную формулу Ньютона и $n = 3$.

Имеем $t = \dfrac{54^0 - 55^0}{5^0} = -0{,}2.$

Используя формулу, получаем:

$\sin 54^0 = 0{,}8192 + (-0{,}2) \cdot 0{,}0532 + (-0{,}2)(-0{,}2 + 1) \cdot (-0{,}0057) +$

$+ (-0{,}2) \cdot (-0{,}2 + 1) \cdot (-0{,}2 + 2) \cdot (-0{,}0003) = 0{,}80903.$

Остаточный член при $n = 3$ имеет вид:

$$R(x) \approx \frac{|-0{,}2 \cdot (-0{,}2+1) \cdot (-0{,}2+2) \cdot (-0{,}2+3)|}{4!} \cdot 0{,}0002 = 0{,}67 \cdot 10^{-5}$$

Отсюда видно, что остаточный член может повлиять только на пятый десятичный знак, поэтому окончательный результат следующий: $\sin 54^0 = 0{,}8090$.

Полученное значение полностью совпадает с табличным.

§ 4. Уплотнение таблиц функций

Интерполирование может применяться для уплотнения заданной таблицы функции, т.е. вычисления по исходной таблице новой таблицы с большим числом значений аргумента на прежнем участке его изменения. Эту операцию называют **субтабулированием** функции. В случае, когда исходная таблица

является таблицей с постоянным шагом, естественно применять интерполяционный многочлен Ньютона.

Пример 6. Дана пятизначная таблица функции $y = \sin x$ на отрезке [0,15; 0,18] с шагом $h = 0{,}005$. Требуется уплотнить эту таблицу с шагом $H = 0{,}001$ на отрезке [0,155; 0,165].

x	0,150	0,155	0,160	0,165	0,170	0,175	0,180
$\sin x$	0,14944	0,15438	0,15932	0,16425	0,16918	0,17411	0,17903

Решение.

По исходной таблице составим таблицу конечных разностей:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0,150	0,14944			
		494		
0,155	0,15438		0	
		494		-1
0,160	0,15932		-1	
		493		1
0,165	0,16425		0	
		493		0
0,170	0,16918		0	
		493		-1
0,175	0,17411		-1	
		492		
0,180	0,17903			

Заметим, что конечные разности второго порядка уже практически близки к нулю в пределах точности таблицы. Поэтому

при использовании интерполяционной формулы Ньютона примем $n = 2$:

$$P(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

Используем первую формулу Ньютона, в данном случае естественно принять $x_0 = 0{,}155$. Значение t для каждого значения x находим по формуле:

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Итак, интерполяционный многочлен Ньютона имеет вид:
$P(x) = 0{,}15438 + 0{,}00494\ t - 0{,}000005\ t\ (t - 1)$.

Результаты вычислений удобно записывать в таблицу:

x	t	$y = P(x)$
0,155	0	0,15438
0,156	0,2	0,1553688
0,157	0,4	0,1563572
0,158	0,6	0,1573452
0,159	0,8	0,1583328
0,160	1,0	0,15932
0,161	1,2	0,1603068
0,162	1,4	0,1612932
0,163	1,6	0,1622792
0,164	1,8	0,1632648
0,165	2,0	0,16425

Можно достичь большей надежности результатов интерполирования, если предусмотреть при переходе к новому узлу исходной таблицы изменение значений x_0 и y_0 и соответствующих конечных разностей (т.е. встречающийся в процессе субтабулирования узел исходной таблицы автоматически принимать за нулевой).

§ 5. Интерполяция сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений. Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей с построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена. Однако такое интерполирование приобретает существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов будет разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно- полиномиальной интерполяции– интерполяции сплайнами (от англ. spline– рейка).

Сплайн– это функция, которая на каждом частичном отрезке интерполяции является алгебраическим многочленом, а на всем заданном отрезке непрерывна вместе с несколькими своими производными. Рассмотрим способ построения сплайнов

третьей степени (так называемых кубических сплайнов), наиболее широко распространенных на практике.

Пусть интерполируемая функция $y = f(x)$ задана своими значениями $y_0, y_1,\ldots,y_n$ в узлах $x_0, x_1, \ldots,x_n$. Длину частичных отрезков $[x_0, x_1], [x_1, x_2],\ldots,[x_{n-1}, x_n]$ обозначим $h_1 = x_1 - x_0$, $h_2 = x_2 - x_1, \ldots, h_n = x_n - x_{n-1}$. Будем искать кубический сплайн на каждом из частичных отрезков в виде:

$S(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$

где a_i, b_i, c_i, d_i – неизвестные коэффициенты (всего их, следовательно, $4n$). Легко доказать, что задача нахождения кубического сплайна имеет единственное решение.

Потребуем совпадения значений $S(x)$ в узлах с табличными значениями функции $f(x)$:

$S(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i,$

$S(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3.$

Число этих уравнений $(2n)$ вдвое меньше числа неизвестных коэффициентов; чтобы получить дополнительные условия, потребуем также непрерывности $S'(x)$ и $S''(x)$ во всех точках, включая узлы. Для этого следует приравнять левые и правые производные $S'(x - 0)$, $S'(x + 0)$, $S''(x - 0)$, $S''(x + 0)$ во внутреннем узле x_i. Сначала получим аналитические выражения для $S'(x)$ и $S''(x)$:

$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2,$

$S''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$

Имеем:

$S'(x_i - 0) = b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2,\ S'(x_i + 0) = b_{i+1},\ i = 1,2,\ldots,n\text{-}1.$

(во втором случае прежде понадобилось в выражении $S'(x)$ заменить i на $i + 1$). Аналогично для второй производной:

$S''(x_i - 0) = 2c_i + 6d_ih_i,\ S''(x_i + 0) = 2c_{i+1},\ i = 1,2,\ldots,n\text{-}1.$

Приравнивая левые и правые производные, получим:

$b_i + 2c_ih_i + 3d_ih_i^2 = b_{i+1},$

$2c_i + 6d_ih_i = 2c_{i+1},\quad i = 1,2,\ldots,n\text{-}1.$

Полученные уравнения в совокупности дают еще $2(n\text{-}1)$ условий. Недостает еще два условия. Обычно в качестве этих условий берут требования к поведению сплайна в граничных точках x_0 и x_n. Если потребовать нулевой кривизны сплайна на концах (т.е. равенства нулю второй производной), то получим:

$c_1 = 0,\ 2c_n + 6d_nh_n = 0.$

Перепишем теперь все уравнения:

$$\begin{cases} a_i = y_{i-1}, (i = 1,2,\ldots,n), \\ a_i + b_ih_i + c_ih_i^2 + d_ih_i^3 = y_i, (i = 1,2,\ldots,n), \\ b_{i+1} - b_i - 2c_ih_i - 3d_ih_i^2 = 0, (i = 1,2,\ldots,n-1), \\ c_{i+1} - c_i - 3d_ih_i = 0, (i = 1,2,\ldots,n-1), \\ c_1 = 0, \\ c_n + 3d_nh_n = 0. \end{cases}$$

Система состоит из $2n + 2(n - 1) + 2 = 4n$ уравнений.

Решив ее, получим значения неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i, определяющих совокупность всех формул для искомого интерполяционного сплайна.

Пример 7. Функция $y = f(x)$ задана таблицей:

x	2	3	5	7
y	4	-2	6	-3

Построить кубический сплайн на каждом из трех частичных отрезках:

Решение

В нашем случае $h_1 = 3 - 2 = 1$, $h_2 = 5 - 3 = 2$, $h_3 = 7 - 5 = 2$. Требуется найти значения коэффициентов a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, определяющих кубический сплайн на трех частных отрезках:

$S_1(x) = a_1 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3$, $2 \le x \le 3$;

$S_2(x) = a_2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3$, $3 \le x \le 5$;

$S_3(x) = a_3 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3$, $5 \le x \le 7$.

Составляем систему:

$$\begin{cases} a_1 = 4, a_2 = -2, a_3 = 6, \\ 4 + b_1 + c_1 + d_1 = -2, \\ -2 + 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 6, \\ 6 + 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -3, \\ b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0, \\ b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0, \\ c_2 - c_1 - 3d_1 = 0, \\ c_3 - c_2 - 6d_2 = 0, \\ c_1 = 0, \\ c_3 + 6d_3 = 0. \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений:

$a_1 = 4$ $b_1 = -8{,}15$ $c_1 = 0$ $d_1 = 2{,}15$

$a_2 = -2$ $b_2 = -1{,}7$ $c_2 = 6{,}43$ $d_2 = -1{,}79$

$a_3 = 6$ $b_3 = 1{,}26$ $c_3 = -4{,}32$ $d_3 = 0{,}72$.

Полученные значения коэффициентов определяют искомый сплайн:

$$S_1(x) = 4 - 8{,}15(x - 2) + 2{,}15(x - 2)^3,$$

$$S_2(x) = -2 - 1{,}70(x - 3) + 6{,}43(x - 3)^2 - 1{,}79(x - 3)^3,$$

$$S_3(x) = 6 + 1{,}26(x - 5) - 4{,}32(x - 5)^2 + 0{,}72(x - 5)^3.$$

Рассмотренный пример показывает, что интерполяция сплайнами сопряжена с немалым объемом вычислительной работы. Весьма необычна и форма результата, так как кубический сплайн имеет различные представления на разных частичных отрезках интерполяции. Это осложняет доступ к значениям сплайна в каждой конкретной точке, так как предполагает прежде поиск параметров, определяющих соответствующую форму сплайна.

§ 6. Численное дифференцирование

Когда производную аналитически заданной функции по причине ее сложности искать затруднительно, либо выражение для производной приобретает слишком неудобную для применения форму, используют приближенное, или численное, дифференцирование. Этот метод тем более необходим, если исходная функция задана таблично. Одним из

способов решения задачи дифференцирования – использование интерполяционных многочленов.

Пусть $f(x)$ – функция, для которой нужно найти производную в заданной точке отрезка $[a,b]$, а $P(x)$ – интерполяционный многочлен для $f(x)$, построенный на отрезке $[a,b]$. Замечая $f(x)$ интерполяционным многочленом $P(x)$, получим значение производной $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$ как значение производной $P'(x)$ интерполяционного многочлена, т.е. примем приближенно: $f'(x) = P'(x)$.

Аналогичным путем можно поступать при нахождении значений производных высших порядков функции $f(x)$.

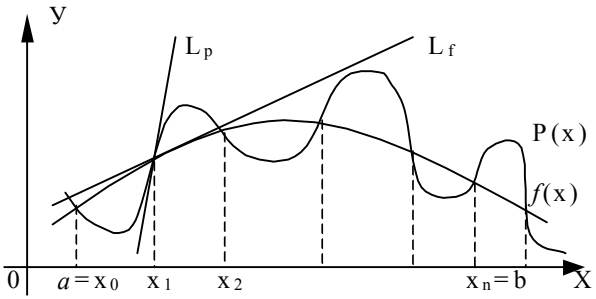


Рис. 3.2.

Полагая, что погрешность интерполирования определяется формулой: $R(x) = f(x) - P(x)$,

получаем подход к оценке погрешности производной $P'(x)$:

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x),$$

т.е. погрешность производной интерполируемой функции равна производной от погрешности этой функции.

Заметим, однако, что задача численного дифференцирования является некорректной. Дело в том, что погрешность производной интерполяционного многочлена может существенно превышать погрешность самой интерполяции. Из рисунка 3.2. хорошо видно, что даже незначительное отличие (в том числе и совпадение) значений $f(x)$ и $P(x)$ никак не гарантирует близости значений их производных $f'(x)$ и $P'(x)$ (L_f и L_P – касательные к кривым $f(x)$ и $P(x)$ соответственно).

Так как чаще рассматриваются таблицы с равноотстоящими узлами, то рассмотрим метод численного дифференцирования на основе интерполяционного многочлена Ньютона.

Запишем для функции $f(x)$ первый интерполяционный многочлен Ньютона:

$$P(x) = P(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Перепишем этот многочлен, производя перемножение скобок:

$$P(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2 - t}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \frac{t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t}{24}\Delta^4 y_0 + \ldots$$

Дифференцируя $P(x_0 + th)$ по t, получим:

$$f'(x) \approx P'(x) =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12}\Delta^4 y_0 + \ldots\right]$$

Подобным путем можно получить и производные функции $f(x)$ более высоких порядков. Однако каждый раз, вычисляя значение производной $f(x)$ в фиксированной точке x, в качестве x_0 следует брать ближайшее слева узловое значение аргумента.

Формула дифференцирования существенно упрощается, если исходным значением x оказывается один из узлов таблицы. Так как в этом случае каждый узел можно считать начальным, то принимая $x = x_0$, $t = 0$, получаем:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \ldots\right].$$

Эта формула позволяет легко и достаточно точно получать значения производных функций, заданных таблично.

Пример 8. Материальная точка M движется прямолинейно. Закон движения $s = f(\tau)$ представлен с помощью таблицы (τ - время в секундах, s – путь в метрах):

τ	0	1	2	3	4	5	6
s	0	2	10	30	68	130	222

Найти скорость v и ускорение ω точки M в момент времени $\tau = 3{,}5$.

Составляем таблицу конечных разностей функции $s = f(\tau)$:

τ	s	Δs	Δ^2s	Δ^3s	Δ^4s
0	0	2			

1	2		6		
		8		6	
2	10		12		0
		20		6	
3	30		18		0
		38		6	
4	68		24		0
		62		6	
5	130		30		
		92			
6	222				

Принимая за начальный момент времени момент $\tau = 3$, ближайший к $\tau = 3{,}5$, будем иметь $t = \frac{3{,}5-3}{1} = 0{,}5$. Применяя формулы: $f'(\tau) = \frac{1}{h}(\Delta s_0 + \frac{2t-1}{2}\Delta^2 s_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6}\Delta^3 s_0)$ и

$$f''(\tau) = \frac{1}{h^2}(\Delta^2 s_0 + (t-1)\Delta^3 s_0),$$

получаем:

$$v = f'(3{,}5) = \frac{1}{1}(38 + \frac{2\cdot 0{,}5-1}{2}24 + \frac{3\cdot(0{,}5)^2 - 6\cdot 0{,}5 + 2}{6}6) = 37{,}75 \quad (м/с)$$

$$\omega = f''(3{,}5) = \frac{1}{1^2}\left(24 + (0{,}5-1)\cdot 6\right) = 21 \quad (м/с).$$

Заметим, что для функции, имеющей производные, разность Δy_0 есть бесконечно малая 1 – го порядка, $\Delta^2 y_0$ – бесконечно малая 2 – го порядка, $\Delta^3 y_0$ – бесконечно малая 3 – го порядка и т.д. относительно h.

Для вывода формулы погрешности дифференцирования используем формулу погрешности интерполирования:

$$R(x) = \frac{h^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot \left| t(t-1)(t-2) \cdot \ldots \cdot (t-n) \right|,$$

где ξ – некоторое промежуточное значение между узлами x_0, x_1,…x_n и заданной точкой x. Предполагая, что $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз, получим для оценки погрешности дифференцирования $r(x)$:

$$r(x) = R'(x) = \frac{h^n}{(n+1)!}[f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{d}{dt}(t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n) +$$

$$+ t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n) \cdot \frac{d}{dt} f^{(n+1)}(\xi)].$$

Для случая оценки погрешности в узле таблицы (когда $x = x_0$ и $t = 0$) будем иметь удобный вид формулы:

$$R'(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} f^{(n+1)}(\xi).$$

Здесь учтено, что при t = 0 $\frac{d}{dt}(t(t-1) \cdot \ldots \cdot (t-n)) = (-1)^n \cdot n!$.

На практике $f^{(n+1)}(\xi)$ оценивать непросто, поэтому при малых h приближенно полагают:

$$f^{(n+1)}(\xi) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}},$$

что позволяет использовать приближенную формулу:

$$r(x_0) \approx \frac{(-1)^n \cdot \Delta^{n+1} y_0}{h(n+1)}.$$

§ 7. Многочлены Бернштейна

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Требуется построить многочлен, который приближенно равен функции $f(x)$ на заданном отрезке.

Рассмотрим отрезок [0;1].

Составим выражение:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} f\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m},$$

где C_n^m - биноминальные коэффициенты, $f\left(\frac{m}{n}\right)$ - значение данной функции в точке $\frac{m}{n}$. Выражение $B_n(x)$ является многочленом n – ой степени; его называют **многочленом Бернштейна**.

Если задано произвольное $\varepsilon > 0$, то можно подобрать такой многочлен Бернштейна (т.е. выбрать его степень n), чтобы для всех значений x на отрезке [0;1] выполнялось неравенство $|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Отметим, что рассмотрение отрезка [0;1], а не произвольного отрезка $[a;\ b]$ не является существенным ограничением, так как с помощью замены переменной $x = a + t(b - a)$ можно любой отрезок $[a;$ b] преобразовать в отрезок [0; 1]. При этом многочлен n – й степени преобразуется в многочлен той же степени.

§ 8. Интерполяция по Чебышеву

Погрешность интерполирования $R(x)$ представляет собой, с точностью до числовой постоянной произведение двух множителей, из которых один – $f^{(n+1)}(\xi)$ зависит от свойств функции $f(x)$ и не поддается регулированию, а величина другого множителя – $\Pi_{n+1}(x)$ определяется исключительно выбором узлов интерполирования.

При неудачном выборе узлов интерполирования верхняя грань модуля погрешности $R(x)$ может быть весьма большой, поэтому возникает задача о наиболее рациональном выборе узлов интерполирования x_i (при заданном числе узлов n) с тем, чтобы находящаяся в нашей власти часть погрешности – многочлен $\Pi_{n+1}(x)$ имел наименьшее максимальное значение по абсолютной величине на отрезке $[a, b]$, или, как коротко говорят, «наименее уклонялся от нуля на отрезке $[a, b]$»; эта задача была решена П.Л. Чебышевым, который доказал, что наилучший выбор в указанном смысле узлов интерполирования дается формулой:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_i,$$

где $\xi_i = -\cos\frac{\pi(2i+1)}{2n+2}$ $(i = 0,1,2,\ldots, n)$ – корни так называемого многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$. В этом случае мы будем иметь:

$$\left|\Pi_{n+1}(x)\right| \le 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Рассмотрим выражение $\widetilde{T}_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ на отрезке [-1; 1], где n – целое неотрицательное число.

Легко показать, что $\widetilde{T}_n(x)$ – многочлен степени n.

Действительно,

$\widetilde{T}_0 = \cos 0 = 1;$

$\widetilde{T}_1(x) = \cos(\arccos x) = x;$

$\widetilde{T}_2(x) = \cos(2\arccos x) = 2x^2 - 1.$

Отметим свойство многочленов $\tilde{T}_n(x)$:

1. Имеет место следующая рекуррентная формула

$\tilde{T}_{к+1}(x) = 2x\ \tilde{T}_к(x) - \tilde{T}_{к-1}(x), \quad (к = 1,2,\ldots).$

2. Старший коэффициент $\tilde{T}_n(x)$ при $n \ge 1$ равен 2^{n-1}.

3. Корни многочлена $\tilde{T}_n(x)$ вещественны, различны и содержатся в открытом промежутке (-1; 1) и равны:

$$x_к = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \quad (к = 0, 1,\ldots,n\text{-}1).$$

4. $\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|\widetilde{T}_n(x)\right| = 1.$

Пользуясь многочленами $\tilde{T}_n(x)$, введем в рассмотрение многочлены Чебышева $T_n(x)$:

$$T_n(x) = \begin{cases} T_0 = 1 & \text{при} \quad n = 0; \\ \dfrac{1}{2^{n-1}} \cdot \widetilde{T}_n(x) & \text{при} \quad n \ge 1. \end{cases}$$

Свойства многочленов Чебышева очевидным образом следуют из свойств многочленов $\tilde{T}_n(x)$, а именно:

1. Корни $T_n(x)$ совпадают с корнями $\tilde{T}_n(x)$;

2. Старший коэффициент $T_n(x)$ равен 1;

3. $\max | T_n(x) | = \frac{1}{2^{n-1}}$;

4. Отметим еще одно важное свойство многочленов Чебышева $T_n(x)$. Пусть $P_n(x)$ – любой многочлен степени n со старшим коэффициентом 1. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Из всех многочленов степени n с единичным старшим коэффициентом многочлен Чебышева порядка п имеет наименьший максимум модуля на отрезке [-1; 1], т.е.

$$\max_{-1 \le x \le 1} | P_n(x) | \ge \max_{-1 \le x \le 1} |T_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если узлы интерполирования выбрать в точках, совпадающих с корнями многочлена Чебышева $(n + 1)$ – го порядка, т.е. в точках $x_i = \cos\frac{\pi(2i+1)}{2n+2}$ $(i = 0, 1,\ldots,n)$,
то множитель $П_{n+1}(x)$ совпадает с $T_{n+1}(x)$ и поэтому будем иметь

$$\max | f(x) - L_n^{т}(x) | \le \frac{\max | f^{(n+1)}(x) |}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Если узлы интерполяции выбрать другим образом, то на основании приведенной теоремы

$$\max |П_{n+1}(x)| \ge \max |T_{n+1}(x)|$$

и оценка погрешности для $L_n(x)$ хуже, чем для $L_n^{т}(x)$.

Здесь $L_n(x)$ означает многочлен Лагранжа, построенный по узлам и корням $П_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdot\ldots\cdot(x - x_n)$, а $L_n^T(x)$ - по точкам $x_i = \cos\frac{\pi(2i+1)}{2n+2}$.

Это и обосновывает высказанное утверждение об оптимальном выборе узлов интерполяции.

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$ то подстановкой $x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t$

придем к функции $\varphi(t) = f(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t)$, определенной на отрезке [-1; 1], тем самым выводы о наилучшем выборе узлов интерполирования переносятся на произвольный промежуток $[a,b]$.

Упражнения и задачи.

3.1. На основании эксперимента получены значения функции $y = f(x)$: $y_1 = 4$ при $x_1 = 0$,

$y_2 = 6$ при $x_2 = 1$,

$y_3 = 10$ при $x_3 = 2$.

Представить приближенно функцию многочленом второй степени.

3.2. Построить многочлен $P(x)$ наименьшей степени, прини мающий заданную систему значений:

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

Чему приближенно равны $P(-1)$, $P(1)$, $P(6)$?

3.3. Найти многочлен четвертой степени, принимающий при $x = 1, 2, 3, 4, 5$ соответственно значения 2, 1, -1, 5, 0.

3.4. Найти многочлен по возможности низкой степени, принимающий при x=2, 4, 5, 10 соответственно значения 3, 7, 9, 19

3.5. Дана таблица значений величин x и y:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Составить таблицу конечных разностей функции y.

3.6. Составить таблицу конечных разностей функции $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ для значений x = 1, 3, 5, 7, 9, 11. Убедиться в том, что все конечные разности 3 – го порядка равны между собой.

3.7. Используя постоянство разностей 4 – го порядка, составить таблицу разностей функции $y = x^4 – 10x^3 + 2x^2 + 3x$ для целых значений x, заключенных в промежутке $1 \le x \le 10$.

3.8. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

3.9. Функция задана таблицей

x	-2	1	2	4
y	25	-8	-15	-23

Составить интерполяционный многочлен Лагранжа и найти значение y при x = 0.

3.10. Составить интерполяционный многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	7	13	21	31	43	57

Найти значение y при $x = 3{,}1$.

3.11. Для функции $f(x) = \cos\frac{\pi}{12}x$ построить интерполяционный многочлен, выбрав узлы $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Вычислить $\cos\frac{\pi}{10}$.

3.12. Для функции $f(x) = \ln x$ построить интерполяционный многочлен, выбрав узлы $x_0 = y$, $x_1 = 10$, $x_2 = 12$, $x_3 = 15$ и используя значения $\ln 2 = 0{,}693147$, $\ln 3 = 1{,}098613$ и $\ln 5 = 1{,}609438$. Вычислить $\ln 11$.

3.13. Даны десятичные логарифмы чисел: $\lg 2 = 0{,}30103$, $\lg 2{,}1 = 0{,}32222$, $\lg 2{,}2 = 0{,}34242$, $\lg 2{,}3 = 0{,}36173$, $\lg 2{,}4 = 0{,}38021$, $\lg 2{,}5 = 0{,}39794$. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, найти $\lg 2{,}03$.

3.14. Даны логарифмы чисел: $\lg 1 = 0{,}000$, $\lg 2 = 0{,}301$, $\lg 3 = 0{,}477$, $\lg 4 = 0{,}602$, $\lg 5 = 0{,}699$. Вычислить с помощью линейного интерполирования числа: $\lg 1{,}7$, $\lg 2{,}5$, $\lg 3{,}1$ и $\lg 4{,}6$.

Функция $y = f(x)$ задана таблицей. Найти значения этой функции при указанных, не входящих в таблицу значениях x_1 и x_2 аргумента x.

3.15.

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7

y	1,042	1,061	1,087	1,119	1,160	1,212	1,274	1,350

$x_1 = 1{,}26, \quad x_2 = 1{,}58.$

3.16.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
y	1,958	2,107	2,268	2,443	2,632	2,841	3,071	3,324

$x_1 = 1{,}89, \quad x_2 = 2{,}43.$

3.17.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
y	0,742	0,789	0,835	0,880	0,924	0,967	1,008	1,046

$x_1 = 0{,}83, \quad x_2 = 0{,}97.$

3,18.

x	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00	2,05
y	1,2322	1,2097	1,1789	1,1389	1,0888	1,0281	0,9558	0,8713

$x_1 = 1{,}74, \quad x_2 = 1{,}97.$

3.19.

x	2,70	2,75	2,80	2,85	2,90	2,95	3,00	3,05
y	1,5827	1,4865	1,3721	1,2383	1,0838	0,9071	0,7069	0,4817

$x_1 = 2{,}72, \quad x_2 = 2{,}93.$

3.20.

x	10	15	20	25	30	35	40	45

y	0,985	0,966	0,940	0,906	0,866	0,819	0,766	0,707

$x_1 = 23, \quad x_2 = 41.$

3.21.

x	1,1	1,6	2,1	2,6	3,1	3,6	4,1	4,6
y	1,029	1,389	1,649	1,800	1,852	1,822	1,739	1,632

$x_1 = 1{,}3, \quad x_2 = 4{,}0.$

3.22.

x	0,13	0,18	0,23	0,28	0,33	0,38	0,43	0,48
y	0,1296	0,1790	0,2280	0,2764	0,3242	0,3712	0,4173	0,4626

$x_1 = 0{,}20, \quad x_2 = 0{,}41.$

3.23.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
y	0,1198	0,0897	0,0660	0,0477	0,0339	0,0236	0,0162	0,0109

$x_1 = 1{,}25, \quad x_2 = 1{,}76.$

3.24.

x	50	55	60	65	70	75	80	85
y	0,285	0,319	0,223	0,042	-0,148	-0,273	-0,283	-0,178

$x_1 = 58, \quad x_2 = 79.$

3.25. Вычислить значения интегрального синуса $Si\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ при $x = 0{,}26$ и при $x = 0{,}45$, используя таблицу его значений:

x	0,17	0,22	0,27	0,32	0,37	0,42	0,47	0,52
Sin(x)	0,16973	0,21941	0,26891	0,31819	0,36720	0,41591	0,46427	0,51225

3.26. Вычислить значения интеграла вероятностей $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ при x = 0,27 и при x = 0,58, используя таблицу его значений.

x	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75
y	0,05637	0,16800	0,27633	0,37938	0,47548	0,56332	0,64203	0,71116

3.27. Заданы пятизначные логарифмы чисел от 4 до 10 через единицу. Пользуясь интерполяционной формулой Ньютона, вычислить четырехзначные логарифмы чисел от 6,5 до 7,0 через 0,1.

3.28. Зная квадраты чисел 5, 6, 7, 8, найти квадрат числа 6,25.

3.29. Построить для функции $f(x) = |x|$ на отрезке [-1; 1] интерполяционный многочлен Лагранжа, приняв за узлы точки:

$$x = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1.$$

3.30. Заменив функцию $f(x)$ многочленом Лагранжа, приближенно вычислить $\int_0^2 f(x)dx$, где

x	0	0,5	1	1,5	2
y	5	4,5	3	2,5	5

3.31. Пользуясь таблицей значений функции $y = f(x)$, найти значение x_0 , при котором $f(x_0) = 0{,}569$:

x	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85
y	-1,125	-0,926	-0,704	-0,458	-0,187	0,109	0,432	0,782

3.32. Пользуясь таблицей значений функции $y = f(x)$, найти значение x_0 , при котором $f(x_0) = 4{,}498$:

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	2,431	2,928	3,497	4,144	4,875	5,696

3.33. Используя таблицу, методом обратного интерполирования решить уравнение $\mathrm{sh}\, x = 4{,}9370$:

x	2	2,2	2,4	2,6
y	3,6269	4,4571	5,4662	9,6947

3.34. Используя таблицу, методом обратного интерполирования решить уравнение $\mathrm{tg}\, x = 1{,}767$:

x	60^o	61^o	62^o
y	1,732	1,804	1,881

Функция $f(x)$ задана таблицей. Вычислить значения производной $f'(x)$ в указанных двух точках x_1 и x_2:

3.35.

x	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$f(x)$	1,44013	1,54722	1,67302	1,81973	1,98970	2,18547	2,40978	2,66557

$x_1 = 2{,}03, \quad x_2 = 2{,}22.$

3.36.

$\boldsymbol{x}$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
$f(x)$	1,0083	1,1134	1,2208	1,3310	1,4449	1,5634	1,6876	1,8186

$\boldsymbol{x}_1 = 1{,}14, \quad x_2 = 1{,}42.$

3.37.

x	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
$f(x)$	3,92847	4,41016	4,93838	5,51744	6,15213	6,84782	7,61045	8,44671

$x_1 = 3{,}02, \quad x_2 = 3{,}31.$

3.38.

x	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00	1,05	1,10
$f(x)$	0,2803	0,3186	0,3592	0,4021	0,4472	0,4945	0,5438	0,5952

$x_1 = 0{,}82, \quad x_2 = 1{,}03.$

3.39.

x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	0,8802	0,9103	0,9340	0,9523	0,9661	0,9764	0,9838	0,9891

$x_1 = 1{,}34, \quad x_2 = 1{,}65.$

Вычислить значения $f'(x)$ и $f''(x)$ в указанной точке:

3.40.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	5	21	55	113	20

$x = 2$.

3.41.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	19	85	261	631

$x = 2{,}5$.

3.42. Найти многочлены Бернштейна 1 – й, 2 – й, 3 – й и 4 – й степеней для функции $y = \sin \pi x$ на отрезке [0; 1].

3.43. Составить многочлены Бернштейна $B_n(x)$ для функций x, x^2, x^3 на отрезке [0; 1].

3.44. Приблизить функцию $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2}$ на отрезке [-1; 1] многочленом Бернштейна $B_4(x)$. Построить графики функций $f(x)$ и $B_4(x)$.

3.45. Приблизить функцию $f(x) = |x|$ при $-1 \le x \le 1$ многочленами Бернштейна четного порядка.

3.46. Написать многочлен Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x) = e^{kx}$ $(a \le x \le b)$.

3.47. Вычислить многочлен Бернштейна $B_n(x)$ для функции $f(x) = \cos x$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

3.48. Дана таблица:

$\sin 10^o = 0{,}1736$, $\sin 13^o = 0{,}2250$,

$\sin 11^o = 0{,}1908$, $\sin 14^o = 0{,}2419$,

$\sin 12^o = 0{,}2079$, $\sin 15^o = 0{,}2588$.

Уплотнить таблицу, вычислив по формуле Ньютона значения синуса через полградуса.

3.49. Из опыта найдены величины удлинения пружины (x мм) в зависимости от нагрузки (P кг) на эту пружину:

x	5	10	15	20	25	30	35	40
P	49	105	172	253	352	473	619	793

Найти нагрузку, дающую удлинение пружины на 14 мм.

3.50. Дана таблица величин x и y:

x	0	1	3	4	5
y	1	-3	25	129	381

Вычислить значения y для $x = 0{,}5$ и для $x = 2$:

а) с помощью линейного интерполирования;

б) по формуле Лагранжа.

Ответы.

3.1. $x^2 + x + 4$.

3.2. $\frac{5}{42}x^3 - \frac{1}{14}x^2 - \frac{55}{21}x + 1;$ $P(-1) \approx 3{,}43;$
$P(1) \approx -1{,}57;$ $P(6) \approx 8{,}43.$

3.3. $-\frac{7}{6}x^4 + \frac{79}{6}x^3 - \frac{151}{3}x^2 + \frac{226}{3}x - 35.$

3.4. $2x - 1$.

3.5.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3					
		7				
2	10		-2			
		5		-6		
3	15		-8		14	
		-3		8		-23
4	12		0		-9	
		-3		-1		
5	9		-1			
		-4				
6	5					

3.6.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	-4			
		-12		
3	-16		32	
		20		48

5	4		80	
		100		48
7	104		128	
		228		48
9	332		176	
		404		
11	736			

3.7.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0				
		-4			
1	-4		42		
		-46		-24	
2	-50		-66		24
		-112		0	
3	-162		-66		24
		-178		24	
4	-340		-42		24
		-220		48	
5	-560		6		24
		-214		72	
6	-774		78		24
		-136		96	
7	-910		174		24
		38		120	
8	-872		294		24

		332		144	
9	-540		438		
		770			
10	230				

Указание. Вычислить первые пять значений у и, получив $\Delta^4 y_0 = 24$, повторить число 24 по всему столбцу четвертых разностей. После этого остальная часть таблицы заполняется с помощью действий сложения (двигаясь справа налево).

3.8. $x^3 + x^2 + x + 1$.

3.9. $x^2 - 10x + 1$; $y(0) = 1$.

3.10. $x^2 + x + 1$; $y(3,1) = 13,71$.

3.11. $\cos \frac{\pi}{10} = 0,9511$.

3.12. $\ln 11 = 2,3979$.

Указание. Для нахождения значений функции в узлах интерполяции использовать равенства $\ln 9 = 2\ln 3$, $\ln 10 = \ln 5 + \ln 2$, $\ln 12 = 2\ln 2 + \ln 3$, $\ln 15 = \ln 5 + \ln 3$.

3.13. $\lg 2,03 = 0,30750$.

3.14. $\lg 1,7 = 0,229$, $\lg 2,5 = 0,399$, $\lg 3,1 = 0,491$, $\lg 4,6 = 0,664$.

3.15. $f(1,26) = 1,105$, $f(1,58) = 1,261$.

3.16. $f(1,89) = 2,092$, $f(2,43) = 3,144$.

3.17. $f(0,83) = 0,817$, $f(0,97) = 0,942$.

3.18. $f(1,74) = 1,2148$, $f(1,97) = 1,0007$.

3.19. $f(2,72) = 1,5463$, $f(2,93) = 0,9805$.

3.20. $f(23) = 0{,}921, \quad f(41) = 0{,}755.$

3.21. $f(1{,}3) = 1{,}184, \ f(4{,}0) = 1{,}758.$

3.22. $f(0{,}20) = 0{,}1987, \ f(0{,}41) = 0{,}3990.$

3.23. $f(1{,}25) = 0{,}0771, \ f(1{,}76) = 0{,}0128.$

3.24. $f(58) = 0{,}275, \quad f(79) = -0{,}291.$

3.25. $Si(0{,}26) = 0{,}25903, \ Si(0{,}45) = 0{,}44497.$

3.26. $\Phi(0{,}27) = 0{,}29742, \ \Phi(0{,}58) = 0{,}58792.$

3.27.

x	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
$\lg x$	0,8129	0,8195	0,8261	0,8325	0,8388	0,8451

3.28. 39,0625.

3.29. $\frac{1}{3}(7x^2 - 4x^4).$

3.30. $7\frac{1}{3}.$

3.31. 1,82.

3.32. 1,45.

3.33. 2,3.

3.34. $60^{o}\ 30^{/}.$

3.35. $f^{/}(2{,}03) = 1{,}42249, f^{/}(2{,}22) = 1{,}87640.$

3.36. $f^{/}(1{,}14) = 1{,}0704, \ f^{/}(1{,}42) = 1{,}1698.$

3.37. $f^{/}(3{,}02) = 5{,}63133, f^{/}(3{,}31) = 7{,}34833.$

3.38. $f^{/}(0{,}82) = 0{,}8077, \ f^{/}(1{,}03) = 0{,}9914.$

3.39. $f^{/}(1{,}34) = 0{,}1873, \ f^{/}(1{,}65) = 0{,}0741.$

3.40. $f'(2) = 9,\ f''(2) = 12.$

3.41. $f'(2{,}5) = 63{,}5,\ f''(2{,}5) = 75.$

3.42. $B_1(x) = 0;\ \ B_2(x) = 2x(1-x);\ B_3(x) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x);$

$B_4(x) = 2x(1-x)[(2\sqrt{2}\ - 3)x^2 - (2\sqrt{2}\ - 3)x + \sqrt{2}\ ].$

3.43. $B_n(x) = x;\ \ B_n(x) = x^2 + \dfrac{x(1-x)}{n};$

$B_n(x) = (1 - \dfrac{1}{n})(1-\dfrac{2}{n})x^3 + \dfrac{3}{n}(1-\dfrac{1}{n})x^2 + \dfrac{1}{n^2}x.$

3.44. $B_n(x) = \dfrac{1}{8}(1-x)(1+x)^3 + \dfrac{1}{16}(1+x)^4.$

3.45. $B_{2n}(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1-x^2}{4}\right)^n \ \ \sum\limits_{i=1}^{n} iC_{2n}^{n-i}\left[\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^i + \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^i\right].$

3.46. $B_n(x) = e^{ka}\left[1 + (e^{\frac{k(b-a)}{n}} - 1)\dfrac{x-a}{b-a}\right]^n.$

3.47. $B_n(x) =$

$\dfrac{1}{2}\left[\left(\cos\dfrac{\pi}{2n} + i\dfrac{2x}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)^n + \left(\cos\dfrac{\pi}{2n} - i\dfrac{2x}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)^n\right],$ где $i^2 =$

$-1.$

3.48.

x	10°	$10^\circ 30'$	11°	$11^\circ 30'$	12°	$12^\circ 30'$	13°	$13^\circ 30'$	14°	$14^\circ 30'$	15°
y	0,1736	0,1822	0,1908	0,1993	0,2079	0,2165	0,2250	0,2334	0,2419	0,2503	0,2588

3.49. 158 кг.

3.50. а) $y(0,5) = -1, y(2) = 11$; б) $y(0,5) = -\frac{15}{16}, y(2) = -3$.

ГЛАВА 4

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ.

§ 1. Постановка задачи численного интегрирования.

При вычислении определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx,$$

где $f(x)$ - непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция, иногда удается воспользоваться известной формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Здесь $F(x)$ - одна из первообразных функций $f(x)$ (т.е. такая функция, что $F'(x) = f(x)$). Однако даже в тех, практически редких случаях, когда первообразную удается явно найти в аналитической форме, не всегда удается довести до числового ответа значение определенного интеграла. Если к тому же учесть, что иногда подынтегральная функция вовсе задается таблицей или графиком, то становится понятным, почему интегрирование по формуле Ньютона-Лейбница не получает широкого применения на практике.

В подобных случаях применяют различные методы приближенного (численного) интегрирования. Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют **квадратурными формулами**. Простой

прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a,b]$ интерполяционным многочленом, например многочленом Лагранжа $L(x)$, и получается приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx .$$

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R,$$

где x_k - выбранные узлы интерполяции;

A_k - коэффициенты, зависящие только от выбора узлов, но не от вида функции;

R - остаточный член или погрешность квадратурной формулы.

Отбрасывая остаточный член R, мы совершаем погрешность усечения. При расчете к ней еще добавляются различные погрешности округления.

§ 2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса.

Разобьем отрезок интегрирования $[a,b]$ на n равных частей системой точек

$$x_i = x_0 + ik \quad (i = 0,1,...,n), \quad x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

и вычислим подынтегральную функцию в полученных узлах

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 0,1,...,n).$$

Подставляя вместо $L(x)$ его представление, получим:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx.$$

Таким образом: $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i A_i$,

где $A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx.$

По поводу полученных формул можно заметить, что:

1) коэффициенты A_i не зависят от функции $f(x)$, так как они составлены только с учетом узлов интерполяции;
2) если $f(x)$ – многочлен степени n, то тогда формула точная, ибо в этом случае $L(x) \equiv f(x)$.

Квадратурные формулы для равностоящих узлов называются формулами Ньютона-Котеса. Формулы Ньютона-Котеса различаются степенями используемых интерполяционных многочленов. Чтобы не иметь дело с многочленами высоких степеней, обычно разбивают промежуток интегрирования на отдельные участки, применяют формулы Ньютона-Котеса с невысокими степенями на каждом участке и потом складывают полученные результаты (что дает так называемые составные формулы). Рассмотрим наиболее простые из формул такого типа.

§ 3. Формула прямоугольников.

Квадратурная формула Ньютона-Котеса при $n = 0$ принимает вид: $\int_a^b f(x)dx = h(y_0 + y_1 + ... + y_{n-1}) + R$

или $\int_a^b f(x)dx = h(y_1 + y_2 + ... + y_n) + R$

и называется формулой прямоугольников.

При $n = 0$ подынтегральная функция заменяется интерполяционным многочленом нулевой степени, т.е. константой. Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции заменяется площадью прямоугольника (Рис.4.1).

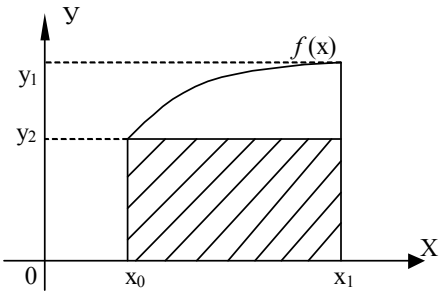


Рис. 4.1.

Если аналитическое выражение подынтегральной функции известно, может быть поставлен вопрос об оценке погрешности численного интегрирования по формуле прямоугольников.

В этом случае имеется в виду, что

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L(x)dx + R(x),$$

где $R(x)$ – остаточный член квадратурной формулы. Формулу остаточного члена получим вначале для отрезка $[x_0, x_1]$. Имеем:

$$R = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx - hy_0 = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx - h \cdot f(x_0),$$

откуда следует, что естественно рассматривать R как функцию шага h : $R = R(h)$. Заметим, что R (0) =0.

Продифференцируем $R(h)$ по h:

$$R^{/}(h) = \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx \right)^{/} - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Заметим, что $R^{/}(0) = 0$. Далее:

$$R^{//}(h) = f^{/}(x_0 + h).$$

Определим R, последовательно интегрируя $R^{//}(h)$ на отрезке [0, h]:

$$\int_0^h R''(z)dz = R'(z)\,|_0^h = R'(h) - R'(0) = R'(h),$$

откуда с учетом $R^{//}(h) = f^{/}(x_0 + h)$ имеем:

$$R'(h) = \int_0^h R''(z)dz = \int_0^h f'(x_0 + z)dz.$$

Применяя к последнему равенству теорему о среднем, получаем: $R^{/}(h) = h \cdot f^{/}(\xi)$,
где $\xi \in [x_0, x_0 + h]$. Далее:

$$\int_0^h R'(z)dz = R(z)\,|_0^h = R(h) - R(0) = R(h),$$

откуда с учетом $R^{/}(h) = h \cdot f^{/}(\xi)$ имеем:

$$R(h) = \int_0^h R'(z)dz = \int_0^h z \cdot f'(\xi)dz = f'(\xi) \cdot \frac{h^2}{2}.$$

Таким образом, погрешность метода при интегрировании функции $f(x)$ на отрезке [x_0, x_1] по формуле прямоугольников имеет величину:

$$R = \frac{h^2}{2} f'(\xi), \quad \xi \in [x_0, x_1].$$

Из полученной формулы видно, что при $f'(\xi) > 0$ формула дает значение интеграла с недостатком, а при $f'(\xi) < 0$ – с избытком.

Легко показать, что при распространении оценки R на весь отрезок интегрирования $[a, b]$ (т.е. на все n частичных отрезков) получается формула:

$$R = \frac{h^2 n}{2} f'(\xi), \qquad \text{где} \quad \xi \in [a, b].$$

Учитывая, что $hn = b - a$, получим следующий окончательный вид формулы для оценки погрешности метода интегрирования по формуле прямоугольников:

$$|R| \le M_1 \frac{|b-a|}{2} h, \qquad \text{где} \quad M_1 = \max_{a \le x \le b} |f'(x)|.$$

Пример 1. По формуле прямоугольников вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить погрешность.

Решение.

Здесь $y = \sqrt{x}$; при $n = 10$ имеем $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$. Для удобства вычислений составим таблицу:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	1,000	1,049	1,095	1,140	1,183	1,225	1,265	1,304	1,342	1,378	1,414

Используя формулу прямоугольников, получим:

$I \approx 0{,}1(1{,}000 + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 +$
$+1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378) = 0{,}1 \cdot 11{,}981 \approx 1{,}20.$

Оценим погрешность. В данном случае $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на отрезке [1; 2] достигает наибольшего значения, равного 0,5, при $x = 1$. Таким образом, $| f'(x) | \le M_1 = \dfrac{1}{2}$. Отсюда находим

$$R \le \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 0{,}025.$$

Следовательно, $I \approx 1{,}20 \pm 0{,}025$.

Вычислим для сравнения этот же интеграл по формуле Ньютона – Лейбница:

$$I = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) \approx 1{,}219.$$

Таким образом, действительно, истинное значение интеграла лежит в найденном интервале.

§4. Формула трапеций

При $n = 1$ из формулы Ньютона – Котеса получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) + R.$$

Эта формула дает один из простейших способов вычисления определенного интеграла и называется **формулой трапеции**. Действительно, при $n = 1$ подынтегральная функция

заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени (т.е. линейной функцией), а это означает геометрически, что площадь криволинейной фигуры подменяется площадью трапеции (рис. 4.2).

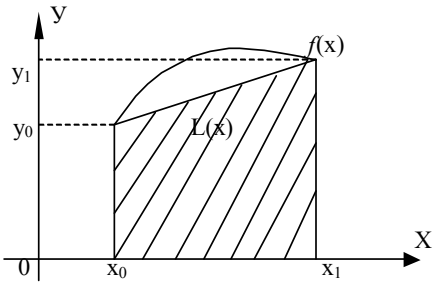


Рис. 4.2.

Формула остаточного члена для отрезка $[x_0, x_1]$ имеет вид:

$$R = -\frac{h^3}{12} f''(\xi), \qquad \text{где } \xi \in [x_0, x_1].$$

Из формулы видно, что при $f''(\xi) > 0$ формула трапеций дает значение интеграла с избытком, а при $f''(\xi) < 0$ – с недостатком.

При распространении оценки на весь отрезок интегрирования $[a, b]$ получается формула:

$$|R| \le M_2 \cdot \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \qquad \text{где} \quad M_2 = \max_{a \le x \le b} |f''(x)|.$$

Пример 2. Вычислить $I = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx$ (см. пример 1, § 3) по формуле трапеций, приняв n = 10; оценить погрешность.

Решение.

Используя вычисления Примера 1 § 3, по формуле трапеций получим:

$$I \approx 0{,}1\left(\frac{1+1{,}414}{2} + 1{,}049 + 1{,}095 + 1{,}140 + 1{,}183 + 1{,}225 + 1{,}265 + \right.$$
$$\left. + 1{,}304 + 1{,}342 + 1{,}378\right) = 1{,}2188.$$

Далее, $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; $\quad |f''(x)| \le \frac{1}{4}$ на отрезке [1; 2].

Таким образом, оценка погрешности:

$$|R| \le \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 0.1^2}{12} \approx 0{,}0002.$$

Итак, $I \approx 1{,}2188 \pm 0{,}0002$.

§ 5. Формула Симпсона

Рассмотрим квадратную формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} y_i A_i + R,$$

где $$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}dx.$$

Используя интерполяционную формулу Лагранжа для равноотстоящих узлов:

$$x - x_0 = ht,$$

$$x - x_1 = x - x_0 - h = h(t - 1),$$

$$x - x_2 = x - x_0 - 2h = h(t - 2), \qquad \text{и т.д.,}$$

тогда $$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1}\, t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n),$$

$$\Pi'_{n+1}(x) = h^n \cdot i!(n-i)!(-1)^{n-i}$$

и формула Лагранжа имеет вид:

$$L(x_0 + th) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{i!(n-1)!(t-i)}.$$

С учетом введенных обозначений формула для «весовых» коэффициентов A_i принимает вид:

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}\,dx, \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

Перейдем в этом интеграле к переменной t. Из подстановки $t = \frac{x - x_0}{h}$ получаем: $dt = \frac{dx}{h}$, т. е. $dx = hdt = \frac{b-a}{n}\,dt$.

При $x = x_0$ имеем $t = 0$, а при $x = x_n$ будет $t = \frac{x_n - x_0}{h} = n$.

Тогда

$$A_i = \frac{b-a}{n}\int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}\,dt = (b-a)H_i,$$

где

$$H_i = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)\cdot\ldots\cdot(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}\,dt, \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

Коэффициенты H_i, определяемые по этой формуле, называются коэффициентами Котеса.

При $n = 2$ коэффициенты Котеса равны ($i = 0,1,2$):

$$H_0 = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{2t}\,dt = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{(t-1)}\,dt = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{t(t-1)(t-2)}{2(t-2)}dt = \frac{1}{6}.$$

Тогда на отрезке $[x_0, x_2]$ формула имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx (x_2 - x_0)\sum_{i=0}^{2} H_i y_i = 2h(\frac{1}{6}y_0 + \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{6}y_2),$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

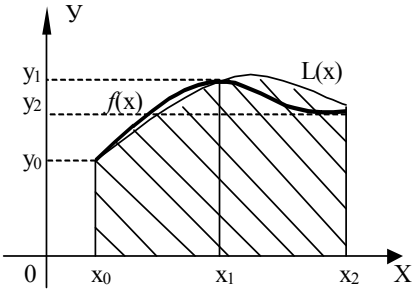


Рис. 4.3.

Геометрически, в соответствии со смыслом интерполяционной формулы Лагранжа при $n = 2$, использование полученной формулы означает замену подынтегральной функции $f(x)$ параболой $L(x)$.

Если считать, что n – четное ($n = 2m$), то, применяя формулу последовательно к каждой паре частичных отрезков $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ $(i = 1,2,\ldots n)$, получим:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{2h}{3}(\frac{y_0 + y_n}{2} + 2(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}) +$$
$$+ (y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2})) + R.$$

Формула называется **формулой Симпсона**.

Оценка остаточного члена формулы Симпсона дается формулой: $$R = \frac{(b-a)h^4}{180} f^{\mathrm{IV}}(\xi), \qquad \xi \in [a,b],$$

или $$|R| \le M_4 \cdot \frac{|b-a| \cdot h^4}{180},$$

где $$M_4 = \max_{a \le x \le b} |f^{\mathrm{IV}}(x)|.$$

Как следует из оценки, формула Симпсона оказывается точной для многочленов до третьей степени включительно (ибо для этих случаев производная четвертого порядка равна нулю). Формула Симпсона обладает повышенной точностью по сравнению с формулой трапеций. Это означает, что для достижения той же точности, что и по формуле трапеций, в ней можно брать меньшее число h отрезков разбиения. Последнее обстоятельство весьма важно для вычислений, поскольку основное время затрачивается на нахождение значений функций в узлах.

Укажем в заключение весьма простой практический прием, позволяющий прогнозировать требуемое число отрезков разбиения по заданной точности ε.

Пусть задана предельная допустимая погрешность интегрирования ε. Желая иметь $|R| \le \varepsilon$, достаточно потребовать:

$$M_4 \cdot \frac{|b-a| h^4}{180} \le \varepsilon,$$

откуда $h^4 \le \dfrac{180\varepsilon}{|b-a|M_4}$, т .е. $h \le \sqrt[4]{\dfrac{180\varepsilon}{|b-a|M_4}}$.

Формула позволяет оценить величину шага, необходимую для достижения заданной точности (из формулы видно, что h имеет порядок $\sqrt[4]{\varepsilon}$).

Пример 3. Вычислить приближенно по формуле Симпсона

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$ с точностью до 0,001.

Решение.

Прежде всего определим, какой шаг h нужно взять для достижения заданной точности. Имеем:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2}; \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

$$f'''(x) = -\frac{3x}{\sqrt{(1+x^2)^5}}; \qquad f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{12x^2-3}{\sqrt{(1+x^2)^7}}.$$

Наибольшее значение $|f^{\mathrm{IV}}(x)|$ на отрезке [0, 1] достигается в точке $x = 0$: $|f^{\mathrm{IV}}(0)| = 3$. Значит

$$h \le \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 0{,}001}{1 \cdot 3}} \approx 0{,}4949.$$

Можно принять h = 0,5. Итак, для достижения нужной точности достаточно разбить интервал интегрирования пополам.

Вычислим значения функции $f(x) = \sqrt{1+x^2}$:

x	0	0,5	1
f(x)	1,0000	1,1180	1,4142

Поэтому

$$I \approx \frac{2 \cdot 0{,}5}{3}\left(\frac{1+1{,}4142}{2} + 2 \cdot 1{,}1180\right) = 1{,}1477$$

Таким образом, округляя последний знак, находим $I \approx 1{,}148$.

Вычислим для сравнения точное значение этого интеграла по формуле Ньютона – Лейбница:

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} = \left[\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{1+x^2})\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})\right] \approx 1{,}1478.$$

Таким образом, значение этого интеграла, вычисленное по формуле Симпсона, имеет даже не три, а четыре верных знака после запятой.

Пример 4. Вычислить по формуле Симпсона $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, приняв $n = 8$. Оценить погрешность результата.

Решение.

Вычислим значения подынтегральной функции при

$x_i = hi \quad (h = \frac{1}{8} = 0{,}125) \quad i = 0,1,\ldots,8.$

x	0	0,125	0,25	0,375	0,5	0,625	0,75	0,875	1
y	1,000000	0,984625	0,941176	0,876712	0,800000	0,719101	0,640000	0,566389	0,500000

Подставляем эти данные в формулу Симпсона:

$$I \approx \frac{2h}{3}\left(\frac{y_0 + y_8}{2} + 2(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + (y_2 + y_4 + y_6)\right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}125}{3}\left(\frac{1 + 0{,}5}{2} + 2(0{,}984625 + 0{,}876712 + 0{,}719101 + 0{,}566389) +\right.$$

$$\left. + (0{,}941176 + 0{,}800000 + 0{,}640000)\right) \approx 0{,}785398.$$

Для оценки погрешности вычислим производные:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}; \qquad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}; \qquad f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3};$$

$$f'''(x) = \frac{24x - 24x^3}{(1+x^2)^4}; \qquad f^{\mathrm{IV}}(x) = \frac{40x^4 + 24x^3 - 184x^2 + 24}{(1+x^2)^5}.$$

На отрезке [0, 1] $|f^{\mathrm{IV}}(x)| \le 24$.

Оцениваем погрешность:

$$R \le 24 \cdot \frac{1 \cdot 0{,}125^4}{180} = 0{,}0000325.$$

Итак, $I \approx 0{,}785398 \pm 0{,}0000325$.

Пример 5. Вычислить приближенно $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Решение.

Разделим отрезок [1; 2] на 10 равных частей. Полагая $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$, составим таблицу значений подынтегральной функции:

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	1,00000	0,90909	0,83333	0,76923	0,71429	0,66667	0,625000	0,58824	0,55556	0,52632	0,50000

1) По формуле прямоугольников получим:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1(y_0 + y_1 + \ldots + y_9) = 0{,}1\ (1{,}00000 + 0{,}90909 + 0{,}83333 +$$

$$+\ \ 0{,}76923 + 0{,}71429 + 0{,}66667 + 0{,}62500 + 0{,}58824 + 0{,}55556 +$$

$$+\ \ 0{,}52632) = 0{,}71877.$$

2) По формуле трапеций:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx 0{,}1\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + y_1 + \ldots + y_9\right) = 0{,}69377.$$

3) По формуле Симпсона:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{2 \cdot 0{,}1}{3}\left(\frac{y_0 + y_{10}}{2} + 2(y_1 + y_3 + \ldots + y_9) + y_2 + y_4 + \ldots + y_8\right) =$$

$$= 0{,}69315.$$

В действительности $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} = 0{,}6931472.$

Таким образом, при разбиении отрезка [0; 1] на 10 частей по формуле Симпсона мы получили пять верных знаков; по формуле трапеций – лишь три верных знака; по формуле прямоугольников мы можем ручаться только за первый знак.

§ 6. Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Наряду с явлениями, протекающими закономерно и предсказуемо, мы часто имеем дело с процессами и событиями, характер проявления которых зависит от случая и заранее непредсказуем. Такого рода события и связанные с ними величины называют **случайными**. В качестве случайной величины можно рассматривать, например, количество людей,

ожидающих автобус на остановке, продолжительность безотказной работы некоторого прибора, число рыб, попавших в заброшенную рыбаками сеть.

Алгоритмы, моделирующие случайные процессы и явления, называют вероятностями. Способы решения задач, использующие случайные величины, получили общее названия метода Монте– Карло. Обычно этот метод предусматривает многократное воспроизведение некоторого вероятностного алгоритма (говорит также о многократном повторении случайных испытаний). Значение искомой величины определяется в результате статистической обработки данных, полученных при этих испытаниях. Характерной особенностью метода Монте – Карло является использование **случайных чисел** (числовых значений некоторой случайной величины).

В основе оценки искомого значения интеграла лежит известное соотношение: $I = y_{ср} \cdot \sigma,$

где $y_{ср}$ – среднее значение подынтегральной функции на области интегрирования;

σ – (многомерный) объем области интегрирования.

При этом, конечно, предполагается, что подынтегральная функция f непрерывна в области интегрирования. Выберем в этой области n случайных точек M_i (i = 1,2,…,n). При достаточно большом n приближенно можно считать:

$$y_{\text{ср}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)$$

Точность оценки значения интеграла методом Монте – Карло, пропорциональна корню квадратному из числа случайных испытаний и не зависит от кратности интеграла. Именно поэтому применение метода целесообразно для вычисления интегралов высокой кратности.

Рассмотрим применение метода для определенного интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

В этой ситуации $\sigma = b - a$ и формула принимает вид:

$$I = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

где x_i $(i = 1,\ldots,n)$ – случайные точки, лежащие в интервале $[a, b]$. Для получения таких точек на основе последовательности случайных точек t_i, равномерно распределенных в интервале [0; 1], достаточно выполнить преобразование:

$x_i = a + (b - a)t_i$.

Значения точек t_i даны в табл.1 Приложения.

Пример 6. Найти приближенное значение интеграла $I = \int_0^1 (1-t^2)dt$, взяв из таблицы случайных чисел подряд 30 значений и ограничиваясь тремя цифрами.

Решение.

Используем формулу $I = \frac{1-0}{30}\sum_{i=1}^{30}(1-t_i^2) = \frac{1}{30}(30 - \sum_{i=1}^{30} t_i^2)$.

Поскольку отрезком интегрирования является промежуток [0; 1], то преобразование $x_i = a + (b - a)t_i$ делать не нужно.

Для удобства вычисления определенного интеграла составим расчетную таблицу:

t_i	t_i^2	t_i	t_i^2	t_i	t_i^2
0,857	0,734	0,609	0,371	0,070	0,005
0,457	0,209	0,179	0,032	0,692	0,478
0,499	0,249	0,974	0,949	0,696	0,484
0,762	0,581	0,011	0,0001	0,203	0,041
0,431	0,186	0,098	0,010	0,350	0,122
0,698	0,487	0,805	0,648	0,900	0,810
0,038	0,001	0,516	0,266	0,451	0,203
0,558	0,311	0,296	0,088	0,318	0,101
0,653	0,426	0,149	0,022	0,798	0,637
0,573	0,328	0,815	0,664	0,111	0,012

Итак,

$$\int_0^1 (1 - t^2)dt = \frac{1}{30}(30 - \sum_{i=1}^{30} t_i^2) = \frac{1}{30}(30 - 9{,}455) = 0{,}685.$$

Пример 7. Вычислить определенный интеграл

$$I = \int_2^3 (x^2 + x^3)dx.$$

Решение.

Из таблицы случайных чисел возьмем 20 значений, начиная с третьего. Расчетная таблица имеет вид:

i	t_i	$x_i=2+t_i$	x_i^2	x_i^3	$f(x_i)=x_i^2+x_i^3$

1	0, 499	2,499	6,245	15,606	21,851
2	0,762	2,762	7,629	21,070	28,699
3	0,431	2,431	5,910	14,367	20,277
4	0,698	2,698	7,279	19,639	26,918
5	0,038	2,038	4,153	8,464	12,617
6	0,558	2,558	6,543	16,738	23,281
7	0,653	2,653	7,038	18,672	25,710
8	0,573	2,573	6,620	17,034	23,654
9	0,609	2,609	6,807	17,759	24,566
10	0,179	2,179	4,748	10,346	15,094
11	0,974	2,974	8,645	26,305	35,150
12	0,011	2,011	4,044	8,133	12,177
13	0,098	2,098	4,402	9,235	13,637
14	0,805	2,805	7,868	22,07	29,938
15	0,516	2,516	6,330	15,926	22,256
16	0,296	2,296	5,276	12,104	17,380
17	0,149	2,149	4,618	9,924	14,542
18	0,815	2,815	7,924	22,307	30,231
19	0,070	2,070	4,285	8,870	13,155
20	0,692	2,692	7,247	19,508	26,755

В нашем случае $a = 2$, $b = 3$, $n = 20$, $\sum_{i=1}^{20} f(x_i) = 437{,}888$, находим $I \approx 437{,}888/20 = 21{,}894$.

Точное значение интеграла есть

$$I = \int_2^3 (x^2 + x^3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_2^3 = 22\frac{7}{12} \approx 22{,}583.$$

Упражнения и задачи

4.1. Применяя формулу прямоугольников ($n = 12$), приближенно вычислить $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$ и результат сравнить с точным ответом.

С помощью формулы трапеций вычислить интегралы и оценить их погрешности, если:

4.2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ $(n=8)$.

4.3. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ $(n=12)$.

4.4. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,dx$ $(n=6)$.

4.5. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ $(n=6)$.

С помощью формулы Симпсона вычислить интегралы:

4.6. $\int_1^9 \sqrt{x}dx$ $(n=4)$.

4.7. $\int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}dx$ $(n=6)$.

4.8. $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx$ $(n=10)$.

4.9. $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}$ $(n=6)$.

4.10. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-0{,}1\sin^2\varphi}\,d\varphi$ $(n=6)$.

4.11. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$ $(n=4)$.

4.12. $\int_0^1 \frac{xdx}{\ln(1+x)}$ $(n=6)$.

4.13. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx$ $(n=10)$.

4.14. $\int_2^{\pi/3} \sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$ $(n=10)$.

4.15. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{x} dx \qquad (n = 10).$

4.16. Принимая $n = 10$, вычислить **константу Каталана** $G = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

4.17. Пользуясь формулой $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, вычислить число π с точностью до 10^{-5}.

4.18. Вычислить $\ln 10 = \int_1^{10} \frac{dx}{x}$, используя формулу Симпсона при $n = 10$.

Вычислить с точностью до 0,01 определенные интегралы:

4.19. $\int_1^2 x \lg x dx.$

4.20. $\int_1^2 \frac{\lg x}{x} dx.$

4.21. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx.$

4.22. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx.$

4.23. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x} dx.$

4.24. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

Вычислить определенные интегралы с точностью до 10^{-4} одним из следующих методов: а) методом прямоугольников; б) методом трапеций; в)методом Симпсона.

4.25. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

4.26. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$

4.27. $\int_0^1 \frac{x dx}{x^2+3x+2}.$

4.28. $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}.$

4.29. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx.$

4.30. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3} dx.$

4.31. $\int_0^2 \sqrt{1+x^5}\,dx.$

4.32. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

4.33. $\int_0^{0,6} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

4.34. $\int_2^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$

4.35. $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx.$

4.36. $\int_0^1 x\ln(1+x)dx\,.$

4.37. $\int_0^1 e^{x^3}\,dx.$

4.38. $\int_0^{0,5} e^{\sqrt{x}}\,dx.$

4.39. $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}.$

4.40. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx.$

4.41. $\int_0^{3,1416} \ln(5+4\cos x)dx.$

4.42. $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx.$

4.43. $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\cos x\,dx.$

4.44. $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x}\cdot\sin\frac{x}{2}\,dx\,.$

4.45. $\int_{0,4}^{0,6} \frac{e^x}{x}dx.$

4.46.

4.47. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_{1,05}^{1,35} f(x)dx$, пользуясь следующей таблицей значений функции $f(x)$:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,60

4.48. Прямая линия касается берега реки в точках A и B. Для измерения площади участка между рекой и прямой AB провешены 11 перпендикуляров к AB от реки через каждые 5*м* (следовательно, прямая AB имеет длину 60*м*). Длины этих перпендикуляров оказались равными 3,28; 4,02; 4,64; 5,26;

4,98; 3,62; 3,82; 4,68; 5,26; 3,82; 3,24 м. Вычислить приближенное значение площади участка.

4.49. Вычислить площадь поперечного сечения судна при следующих данных(рис. 4.4):

$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5 = A_5A_6 = A_6A_7 = 0{,}4$ *м*,

$AB = 3$ *м*, $A_1B_1 = 2{,}92$ *м*, $A_2B_2 = 2{,}75$ *м*, $A_3B_3 = 2{,}52$ *м*,

$A_4B_4 = 2{,}30$ *м*, $A_5B_5 = 1{,}84$ *м*, $A_6B_6 = 0{,}92$*м*.

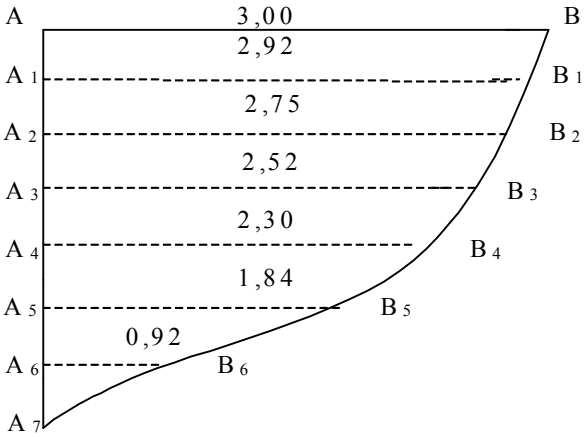


Рис. 4.4.

4.50. Для вычисления работы пара в цилиндре паровой машины вычисляют площадь индикаторной диаграммы, представляющей собой графическое изображение зависимости между

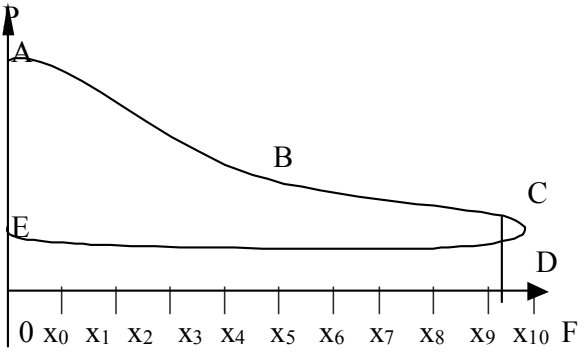


Рис. 4.5.

давлением пара в цилиндре и ходом поршня. На рис. 4.5. изображена индикаторная диаграмма паровой машины. Ординаты точек линий *ABC* и *ED*, соответствующие абсциссам $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{10}$, даны следующей таблицей:

Абсциссы……	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
Ординаты линии *ABC*	60,6	53,0	32,2	24,4	19,9	17,0	15,0	13,3	12,0	11,0	6,2
Ординаты линии *ED*	5,8	1,2	0,6	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,3	1,8	5,7

Вычислить с помощью формулы Симпсона площадь *ABCDE* . Ординаты даны в миллиметрах. Длина *OF* = 88,7 *мм* (точка *F* – общая проекция точек *C* и *D* на ось абсцисс).

4.51. Под действием переменной силы $\overline{F}$, направленной вдоль оси О*x,* материальная точка переместилась по оси О*x* из положения $x = 0$ в положение $x = 4$. Вычислить приближенную работу А силы $\overline{F}$, если дана таблица значений ее модуля *F*:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Вычисление провести по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

4.52. На рис. 4.6. изображена индикаторная диаграмма (упрощенная) паровой машины. Исходя из размеров, проставленных на чертеже (в мм), вычислить площадь *ABCDO*, если известно уравнение линии *BC* : pv^{γ} = const (линия *BC* называется **адиабатой**), γ = 1,3, *AB* – прямая, параллельная оси *Ov*.

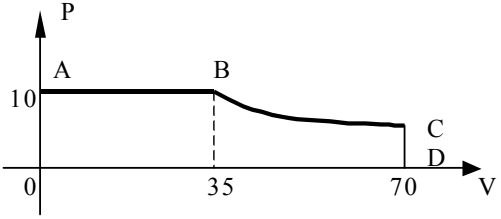


Рис. 4.6.

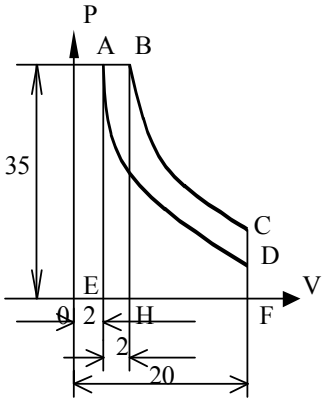


Рис. 4.7.

4.53. На рис. 4.7 представлена индикаторная диаграмма дизельного двигателя. Отрезок *AB* соответствует процессу сгорания смеси, адиабата *BC* – расширению, отрезок *CD* – выпуску и адиабата *DA* – сжатию. Уравнение адиабаты *BC* : $pv^{1,3}$ = const, уравнение адиабаты *AD* : $pv^{1,35}$ = const. Исходя из размеров, проставленных на чертеже (в мм), определить площадь *ABCD*.

4.54. Приближенно найти длину эллипса, полуоси которого $a = 10$ и $b = 6$.

4.55. Плоская фигура, ограниченная полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Вычислить по формуле Симпсона с точностью до 0,01 объем тела вращения.

4.56. Построить по точкам график функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \qquad (0 \le x \le 2\pi),$$

приняв $\Delta x = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответы

4.1. –6,2832.

4.2. 0,69315.

4.3. 0,83566.

4.4. 1,4675.

4.5. 0,8109.

4.6. 17,333.

4.7. 5,4024.

4.8. 0,837.

4.9. 2,59.

4.10. 1,53.

4.11. 0,8111.

4.12. 0,2288.

4.13. 1,09.

4.14. 0,950.

4.29. 1,7500.

4.30. 3,2413.

4.31. 4,2218.

4.32. 0,4969.

4.33. 0,6082.

4.34. 2,6291.

4.35. 0,3927.

4.36. 0,2500.

4.37. 1,3419.

4.38. 0,8120.

4.39. 1,1184.

4.40. 0,1728.

4.41. 4,3555.

4.42. 0,6205.

4.15. 0,985.

4.16. 0,915966.

4.17. 3,14159.

4.18. 2,31.

4.19. 0,28.

4.20. 0,10.

4.21. 1,61.

4.22. 0,09.

4.23. 0,67.

4.24. 0,75.

4.25. 0,5236.

4.26. 0,1963.

4.27. 0,1178.

4.28. 0,3926

4.43. 0,6076.

4.44. 1,5708.

4.45. 0,6651.

4.46. 0,7721.

4.47. 0,957.

4.48. 239 $м^2$.

4.49. 5,7 $м^2$.

4.50. 1950 $мм^2$.

4.51. 11,625; 11,417.

4.52. 569 $мм^2$.

4.53. 138 $мм^2$.

4.53. 5104.

4.55. 4,93.

4.56.

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0,99	1,65	1,85	1,72	1,52	1,42

ГЛАВА 5
ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Постановка задачи

Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением является уравнение первого порядка

$$y' = f(x,y).$$

Основная задача, связанная с этим уравнением, известна как задача Коши: найти решение уравнения в виде функции $y(x)$, удовлетворяющей начальному условию:

$$y(x_0) = y_0.$$

Геометрически это означает (рис. 5.1), что требуется найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ при выполнении равенства $y' = f(x, y)$.

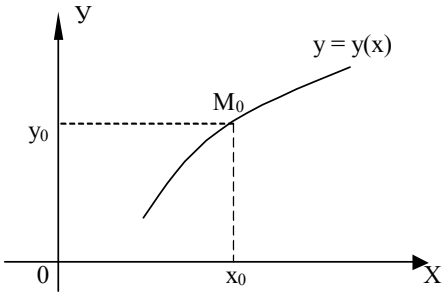


Рис. 5.1.

Существование и единственность решения дифференциального уравнения обеспечивается теоремой.

Теорема Пикара. Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области G, определяемой неравенствами

$$|x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b,$$

и удовлетворяет в этой области условию Липшица по y:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le M\,|y_1 - y_2|,$$

то на некотором отрезке $|x - x_0| \le h$, где h – положительное число, существует, и притом единственное, решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y_0 = y(x_0)$.

Здесь M – постоянная (константа Липшица), зависящая в общем случае от a и b. Если $f(x, y)$ имеет ограниченную в G производную $f_y'(x, y)$, то при $(x, y) \in G$ можно принять

$M = \max |f_y'(x, y)|$.

В классическом анализе разработано немало приемов нахождения решений дифференциальных уравнений через элементарные функции. Между тем весьма часто при решении практических задач эти методы оказываются либо совсем беспомощными, либо их решение связывается с недопустимыми затратами усилий и времени.

По этой причине для решения задач практики созданы методы приближенного решения дифференциальных уравнений. Весьма условно, в зависимости от формы представления решения, эти методы подразделяются на три основные группы.

1. **Аналитические методы**, применение которых дает решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения.

2. **Графические методы**, дающие приближенное решение в виде графика.

3. **Численные методы**, когда искомая функция получается в виде таблицы.

Мы рассмотрим некоторые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, относящиеся к указанным группам. Что же касается дифференциальных уравнений n – го порядка:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

для которых задача Коши состоит в нахождении решения $y(x_0) = y(x)$, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, то их можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Так, например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

можно записать в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z). \end{cases}$$

Методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений основываются на соответствующих методах решения одного уравнения.

§2. Представление решения задачи Коши в виде

степенного ряда

Предположим для простоты, что $x_0 = 0$, что всегда можно добиться введением новой переменной

$$t = x - x_0.$$

Считая, что такая замена произведена, вместо t будем писать x. Представим искомое решение рядом Маклорена

$$y = y_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

и укажем прием, позволяющий находить коэффициенты a_1, a_2,….

Очевидно,

$$a_n = \frac{1}{n!} y^{(n)}(0).$$

В частности,

$$a_1 = \frac{1}{1!} y'(0) = \frac{1}{1!} f(0, y_0) = f(0, y_0).$$

Далее

$$a_2 = \frac{1}{2!} y''(0).$$

Следовательно, для определения a_2 нужно найти y''. Дифференцируя обе части равенства $y = f(x, y)$, получим

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'.$$

Следующим дифференцированием находим выражение для y''' и затем a_3 и т.д.

Этот процесс при условии, что $f(x, y)$ имеет частные производные любого порядка, можно продолжать сколько угодно. При довольно широких предположениях об $f(x, y)$ можно доказать сходимость ряда Маклорена в некотором

промежутке (-α, α) к решению задачи Коши. Усеченная сумма полученного ряда будет приближенным решением этой задачи. Оно тем меньше отличается от истинного, чем меньше $|x|$.

Пример 1. Написать несколько членов разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y'' = x + y^2$$

при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение.

Приближенное решение будем искать в виде ряда Маклорена. При данных задачи сразу имеем:

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0.$$

Последовательно дифференцируя уравнение $y'' = x + y^2$, получим:

$$y''' = 1 + 2yy';\quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2;$$
$$y^{V} = 2yy''' + 6y'y'';$$
$$y^{(6)} = 2yy^{IV} + 8y'y''' + 6y''^2;$$
$$y^{(7)} = 2yy^{V} + 10y'y^{IV} + 20y''y''';$$
$$y^{(8)} = 2yy^{(6)} + 12y'y^{V} + 30y''y^{IV} + 20y'''^2.$$

Принимая во внимание значения $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$, найденные выше, получим при $x = 0$:

$$y'''(0) = 1;\quad y^{IV}(0) = 2;\quad y^{V}(0) = 0;$$
$$y^{(6)}(0) = 8;\qquad y^{(7)}(0) = 20;\qquad y^{(8)}(0) = 20.$$

Подставив в ряд, найдем приближенное решение задачи:

$$y(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{252} + \frac{x^8}{2016} + \dots .$$

Пример 2. Представить степенным рядом частное решение уравнения: $y'' + a^2 y = 0$

при начальных условиях $y(0) = 0$, $y'(0) = a$.

Решение.

Из уравнения находим $y''(0) = 0$. Далее, последовательно дифференцируя, найдем

$y''' + a^2 y' = 0$; $y'''(0) = -a^3$;

$y^{(4)} + a^2 y'' = 0$; $y^{(4)}(0) = 0$;

$y^{(5)} + a^2 y''' = 0$; $y^{(5)}(0) = a^5$.

Легко убедиться, что вообще $y^{(2n)}(0) = 0$, $y^{(2n+1)}(0) = (-1)^n a^{2n+1}$, откуда частное решение представляется следующим степенным рядом:

$$y(x) = ax - \frac{a^3 x^3}{3!} + \frac{a^5 x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{a^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Полученный ряд представляет разложение в ряд Маклорена функции $y = \sin ax$. Поэтому найденное решение суть $y = \sin ax$. В справедливости решения можно убедиться непосредственным интегрированием дифференциального уравнения.

Если уравнение линейное, то удобнее искать коэффициенты разложения частного решения по методу неопределенных коэффициентов. Для этого непосредственно «подставляем» ряд:

$$y = y_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

в дифференциальное уравнение и приравниваем коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x в разных частях уравнения.

Пример 3. Найти решение уравнения

$y'' = 2xy' + 4y,$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение.

Полагаем

$y = y_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_nx^n + \ldots.$

На основании начальных условий находим $y_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Следовательно,

$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots a_nx^n + \ldots,$

$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots,$

$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$

Подставляя написанные выражения в заданное уравнение и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем

$2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots = (2x + 4a_2x^2 + 6a_3x^3 + \ldots$

$\ldots + 2na_nx^n + \ldots) + 4x + 4a_2x^2 + 4a_3x^3 + \ldots + 4a_nx^n + \ldots$

$2a_2 = 0,$ откуда $a_2 = 0,$

$6a_3 = 2 + 4,$ откуда $a_3 = 1,$

$12a_4 = 4a_2 + 4a_2,$ откуда $a_4 = 0,$

$\ldots$

$n(n-1)a_n = 2(n-2)a_{n-2} + 4\,a_{n-2},$ откуда $a_n = \dfrac{2a_{n-2}}{n-1},$

$\ldots$

Следовательно,

$$a_5 = \frac{2\cdot 1}{4} = \frac{1}{2!}, \quad a_7 = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6} = \frac{1}{3!}, \quad a_9 = \frac{1}{4!}, \ldots, a_{2k+1} = \frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k} = \frac{1}{k!}, \ldots$$

$a_4 = 0, \quad a_6 = 0, \ldots, a_{2k} = 0, \ldots$.

Подставляя найденные коэффициенты, получаем искомое решение

$$y = x + \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \ldots$$

Полученный ряд сходится при всех значениях x.

Заметим, что найденное частное решение можно выразить через элементарные функции: вынося x за скобку, получим в скобках разложение функции e^{x^2}.

Следовательно,

$$y = xe^{x^2}$$

§ 3. Метод Пикара

Этот метод позволяет получить приближенное решение дифференциального уравнения в виде функции, представленной аналитически. Метод Пикара возник в связи с доказательством существования и единственности решения уравнения.

Пусть в условиях теоремы существования требуется найти решение уравнения

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Проинтегрируем обе части уравнения в пределах от x_0 до x:

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx,$$

или $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx.$$

Очевидно, что решение интегрального уравнения будет удовлетворять дифференциальному уравнению и начальному условию. Действительно, при $x = x_0$ получим:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} f(x, y)dx = y_0.$$

Вместе с тем интегральное уравнение позволяет применить метод последовательных приближений. Положим $y = y_0$ и получим первое приближение:

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx.$$

Интеграл в правой части содержит только переменную x; после нахождения этого интеграла будет получено аналитическое выражение приближения $y_1(x)$ как функции переменной x. Заменим теперь в интегральном уравнении у найденным значением $y_1(x)$ и получим второе приближение:

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

и т.д. В общем случае итерационная формула имеет вид:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \qquad (n = 1,2,...).$$

Циклическое применение формулы дает последовательность функций

$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$.

Предел последовательности является решением интегрального уравнения, а следовательно, и дифференциального уравнения с начальными условиями $y(x_0) = y_0$. Имеет место следующая теорема.

Теорема. Если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) правая часть дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y)$$

непрерывна и имеет ограниченную частную производную $f_y'(x,y)$, то в некотором интервале, содержащем точку x_0, последовательность $\{y_n(x)\}$ сходится к функции $y(x)$, являющейся решением данного уравнения и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$.

Оценка погрешности k – го приближения дается формулой:

$$| y(x) - y_k(x) | \le M^k N \frac{d^{k+1}}{(k+1)!},$$

где M – константа Липшица,

N – наибольшее значение функции $f(x, y)$ в области G,

$$d = \min\left(a, \frac{b}{N}\right).$$

Пример 4. Методом последовательных приближений найти приближенное решение дифференциального уравнения

$$y' = x^2 + 3y,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Запишем для данного случая формулу:

$$y_n(x) = 2 + \int_0^x \left(x^2 + 3y_{n-1}\right)dx \qquad (n = 1,2,...).$$

Начальным приближением будем считать $y_0(x) = 2$. Имеем:

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x \left(x^2 + 6\right)dx = 2 + 6x + \frac{x^3}{3}.$$

Далее получаем:

$$y_2(x) = 2 + \int_0^x \left[x^2 + 3\left(2 + 6x + \frac{x^3}{3}\right)\right]dx = 2 + 6x + 9x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}.$$

Аналогично:

$$y_3(x) = 2 + 6x + 9x^2 + \frac{28}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{3x^5}{20} \qquad \text{и т.д.}$$

Оценим погрешность третьего приближения. Для определения области G, примем, например, $a = 1$, $b = 2$. В прямоугольнике G функция $f(x, y) = x^2 + 3y$ определена и непрерывна, причем:

$$M = \max |f_y'(x, y)| = 3,$$

$$N = \max |f(x, y)| = 7.$$

Вычисляем $d = \min(1; \frac{2}{7}) = \frac{2}{7}$. Используя оценочную формулу получаем:

$$| y(x) - y_3(x) | \le 3^3 \cdot 7 \cdot \frac{\left(\frac{2}{7}\right)^4}{4!} \approx 0{,}053.$$

В большинстве случаев оценка погрешности оказывается завышенной. Практически, применяя метод Пикара, останавливаются на таком n, для которого значения y_{n-1} и y_n совпадают в пределах допустимой точности.

§ 4. Метод Эйлера

В основе метода ломаных Эйлера лежит идея графического построения решения дифференциального уравнения, однако этот метод дает одновременно и способ нахождения искомой функции в численной (табличной) форме.

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Выбрав достаточно малый шаг h, построим, начиная с точки x_0, систему равноотстоящих точек $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,1,2,\ldots)$. Вместо искомой интегральной кривой на отрезке $[x_0, x_1]$ рассмотрим отрезок касательной к ней в точке $M_0(x_0, y_0)$ (обозначим ее L_1, рис. 5.2) с уравнением $y = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0)$.

При $x = x_1$ из уравнения касательной L_1 получаем:

$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$,

откуда видно, что приращение значения функции на первом шаге имеет вид: $\Delta y_0 = hf(x_0, y_0)$.

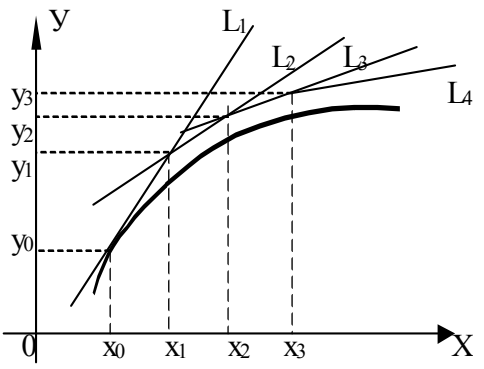


Рис. 5.2.

Аналогично, проводя касательную L_2 к некоторой интегральной кривой семейства в точке $M_1(x_1, y_1)$, получим:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

что при $x = x_2$ дает

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1),$$

т.е. y_2 получается из y_1 добавлением приращения $\Delta y_1 = hf(x_1, y_1)$.

Аналогично находим

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2),$$

$$\cdots$$

$$y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Таким образом, приближенные значения решения в точках x_0, x_1, …, x_n найдены. Соединяя на координатной плоскости точки (x_0, y_0), (x_1, y_1),…, (x_n, y_n) отрезками прямой, получим ломаную – приближенное изображение интегральной кривой (рис. 5.2). Эта ломаная называется **ломаной Эйлера**.

Метод Эйлера обладает малой точностью, к тому же погрешность каждого нового шага систематически возрастает. Наиболее приемлемым для практики методом оценки точности является в данном случае способ двойного счета – с шагом h и с шагом $\frac{h}{2}$. Совпадение десятичных знаков в полученных двумя способами результатах дает основание считать их верными.

Пример 5. Решить методом Эйлера дифференциальное уравнение

$$y' = y + x$$

с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке [0; 1], приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение.

Разделим отрезок [0; 1] на 10 частей точками $x_0 = 0$; 0,1; 0,2; …; 1,0. Значения $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$ будем искать по формуле

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n),$$

или

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n + x_n).$$

Таким образом, получаем

$y_1 = 1 + 0{,}1(1 + 0) = 1{,}1,$

$y_2 = 1{,}1 + 0{,}1(1{,}1 + 0{,}1) = 1{,}22,$

…

В процессе решения составляем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,1	1,22	1,362	1,524	1,7164	1,9380	2,1918	2,4810	2,8091	3,1800
$f(x,y)=x+y$	1	1,2	1,42	1,662	1,924	2,2164	2,5380	2,8918	3,2810	3,7091	

Точное решение данного уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям, будет

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Для сравнения: приближенное значение $y(1) = 3{,}1800$, точное значение $y(1) = 3{,}4366$.

Существуют различные уточнения метода Эйлера, повышающие его точность. Модификации метода обычно направлены на то, чтобы более точно определить направление перехода из точки (x_i, y_i) в точку (x_{i+1}, y_{i+1}). Метод Эйлера – Коши, например, рекомендует следующий порядок вычислений:

$$y^*_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^*_{i+1})}{2}.$$

Геометрически это означает, что мы определяем направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке (x_{i+1}, y^*_{i+1}), а в качестве окончательного берем среднее этих направлений.

§ 5. Метод Рунге – Кутта

Метод Эйлера и метод Эйлера – Коши относятся к семейству методов Рунге – Кутта, имеющих следующий вид. Фиксируем некоторые числа:

$\alpha_2, \ldots, \alpha_q$; $p_1, \ldots, p_q$; β_{ij}, $0 < j < i \le q$;

последовательно вычисляем:

$k_1(h) = h \cdot f(x, y)$,

$k_2(h) = h \cdot f(x + \alpha_2 h,\ y + \beta_{21} k_1(h))$,

…

$k_q(h) = h \cdot f(x + \alpha_q h,\ y + \beta_{q1}\, k_1(h) + \beta_{q2}\, k_2(h) + \ldots + \beta_{qq-1} k_{q-1}(h))$

и полагаем:

$$y(x+h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^{q} p_i k_i(h) = z(h).$$

Числа β_{ij} $p_1, \ldots, p_q$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} \beta_{21} = \alpha_2, \\ \sum\limits_{j=1}^{i} \beta_{ij} = \alpha_i \qquad (i = 2,3,...,q), \\ \sum\limits_{i=1}^{q} p_i = 1. \end{cases}$$

Рассмотрим вопрос о выборе параметров α_i, p_i, β_{ij}.

Обозначим

$\varphi(h) = y(x + h) - z(h)$.

Будем предполагать, что

$\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(s)}(0)$

при любых функциях $f(x, y)$, а $\varphi^{(s+1)}(0) \neq 0$ для некоторой функции $f(x, y)$. По формуле Тейлора справедливо равенство

$$\varphi(h) = \sum_{i=0}^{s} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} h^i + \frac{\varphi^{(s+1)}(\Theta x)}{(s+1)!} h^{s+1},$$

где $0 < \Theta < 1$. Величина $\varphi(h)$ называется погрешностью метода на шаге, а s – порядком погрешности метода.

а) При $q = 1$ будем иметь:

$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 \cdot h \cdot f(x, y),$$
$$\varphi(0) = 0,$$
$$\varphi'(0) = (y'(x + h) - p_1 \cdot f(x, y)) \Big|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1),$$
$$\varphi''(h) = y''(x + h).$$

Ясно, что равенство $\varphi'(0) = 0$ выполняется для любых функций $f(x, y)$ лишь при условии, что $p_1 = 1$. Легко видеть, что

при этом значении p_1 получается метод Эйлера. Для погрешности этого метода будем иметь:

$$\varphi(h) = \frac{\varphi''(\Theta h) \cdot h^2}{2}.$$

б) рассмотрим случай $q = 2$, тогда

$$\varphi(h) = y(x + h) - y(x) - p_1 h f(x, y) - p_2 h f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} h f(x, y)).$$

Вычисляя производные функции $\varphi(h)$ и подставляя в выражения для $\varphi(h)$, $\varphi'(h)$, и $\varphi''(h)$ значение $h = 0$, получим:

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\varphi'(0) = (1 - p_1 - p_2) f(x, y),$$

$$\varphi''(0) = (1 - 2p_2\alpha_2) f_x'(x, y) + (1 - 2p_2\beta_{21}) f_y'(x, y) \cdot f(x, y).$$

Хорошо видно, что требование

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$$

будет выполняться для всех $f(x, y)$ лишь в том случае, если одновременно будут справедливы три равенства относительно четырех параметров:

$$\begin{cases} 1 - p_1 - p_2 = 0, \\ 1 - 2p_2\alpha_2 = 0, \\ 1 - 2p_2\beta_{21} = 0. \end{cases}$$

Произвольно задавая значение одного из параметров и определяя значение остальных из системы, мы будем получать различные методы Рунге - Кутта с порядком погрешности $s = 2$.

Например, при $p_1 = \frac{1}{2}$ получаем: $p_2 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_{21} = 1$.

Для этих значений параметров вычислительная формула принимает вид:

$$y_{i+1}^{*} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{f(x_i y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{*})}{2}.$$

Таким образом, в данном случае мы приходим к расчетным формулам, соответствующим методу Эйлера – Коши. Из разложения функции $\varphi(h)$ в ряд Тейлора следует, что главная часть погрешности на шаге есть $\frac{\varphi'''(0)}{6} h^3$, т.е. пропорциональна третьей степени шага h.

в) вычислительной практике наиболее часто используется метод Рунге – Кутта с $q = 4$ и $s = 4$.

Приведем один из вариантов соответствующих расчетных формул:

$$k_1 = h \cdot f(x, y),$$

$$k_2 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}),$$

$$k_3 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3),$$

$$\Delta y = z(h) - y(x) = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Отметим, что в данном случае погрешность на шаге пропорциональна пятой степени шага (h^5). Отсюда, в частности, следует, что при достаточно малом h и малых погрешностях

вычислений решение уравнения, полученное методом Рунге – Кутта, будет близким к точному.

Геометрический смысл использования метода Рунге – Кутта состоит в следующем. Из точки (x_i, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_1, для которого tg $\alpha_1 = f(x_i, y_i)$. На этом направлении выбирается точка с координатами $\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$. Затем из точки ($x_i$, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_2, для которого tg$\alpha_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$, и на этом направлении выбирается точка с координатами $(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$. Наконец, из точки ($x_i$, y_i) сдвигаются в направлении, определяемом углом α_3, для которого tg $\alpha_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$ и на этом направлении выбирается точка с координатами ($x_i + h$, $y_i + k_3$). Этим задается еще одно направление, определяемое углом α_4, для которого tg $\alpha_4 = f\ (x_i + h,\ y_i + k_3)$. Четыре полученные направления усредняются в соответствии с последней из формул. На этом окончательном направлении и выбирается точка $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + \Delta y)$.

Пример 6. Составить таблицу значений функции y, определяемой уравнением

$$y' = y - \frac{2x}{y}$$

при начальном условии $y(0) = 1$ в промежутке [0; 1]; шаг $h = 0{,}2$ (точное решение $y = \sqrt{2x+1}$).

Решение.

Найдем числа:

$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2(1 - \frac{2 \cdot 0}{1}) = 0{,}2;$

$k_2 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) = 0{,}2 \cdot f(0{,}1;\ 1{,}1) = 0{,}2\ (1{,}1 - \frac{0{,}2}{1{,}1}) = 0{,}1836$

$k_3 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) = 0{,}2(0{,}1;\ 1{,}0918) = 0{,}1817;$

$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0{,}2 \cdot f(0{,}2;\ 1{,}1817) = 0{,}1686.$

Отсюда

$$\Delta y = \frac{1}{6}(0{,}2 + 0{,}3672 + 0{,}3634 + 0{,}1686) = 0{,}1832.$$

Значит, $y_1 = 1 + 0{,}1832 = 1{,}1832$ при $x = 2$. Аналогичным образом находим y_2 и т.д. Процесс вычислений ведем по такой

i	x	y	$f(x,y)$	$k_i = h \cdot f(x, y)$	Δy
1	0	1	1	0,2	0,1832
2	0,1	1,1	0,0918	0,1836	
3	0,1	1,0918	0,0908	0,1817	
4	0,2	1,1817	0,0843	0,1686	
1	0,2	1,1832	0,8451	0,1690	0,1584
2	0,3	1,2677	0,7944	0,1589	
3	0,3	1,2626	0,7874	0,1575	
4	0,4	1,3407	0,7440	0,1488	
1	0,4	1,3416	0,7453	0,1491	

схеме:

Заметим, что все пять знаков чисел y_1 =1,1832 и y_2 =1,3416 верны, если сравнить с точным решением $y = \sqrt{2x+1}$.

Пример 7. Методом Рунге – Кутта проинтегрировать уравнение

$$x^2y' - xy = 1$$

при начальном условии y(1) = 0 в промежутке [1; 2]; шаг h = 0,2 (точное решение $y = \frac{x^2-1}{2x}$).

Решение.

Здесь $f(x, y) = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^2}$. Найдем числа:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0}{1} + \frac{1}{1^2} \right) = 0{,}2;$$

$$k_2 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}\right) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}1}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2} \right) = 0{,}18;$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}\right) = 0{,}2\left(\frac{0{,}09}{1{,}1} + \frac{1}{1{,}1^2} \right) = 0{,}18;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2} \right) = 0{,}17.$$

Следовательно,

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}18,$$

т.е. $y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0{,}18 = 0{,}18$

Аналогичным образом находим:

$$k_1 = h \cdot f(x, y) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}18}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}2^2} \right) = 0{,}17;$$

$$k_2 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_1}{2}) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}26}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2} \right) = 0{,}15;$$

$$k_3 = h \cdot f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{k_2}{2}) = 0{,}2 \left(\frac{0{,}25}{1{,}3} + \frac{1}{1{,}3^2} \right) = 0{,}15;$$

$$k_4 = h \cdot f(x + h, y + k_3) = 0{,}2 \cdot \left(\frac{0{,}33}{1{,}4} + \frac{1}{1{,}4^2} \right) = 0{,}14.$$

Следовательно,

$$\Delta y_1 = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0{,}15,$$

т.е. $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = 0{,}18 + 0{,}15 = 0{,}33,$

и т.д.

§ 6. Метод Милна

Пусть дано дифференциальное уравнение $y = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Метод Милна заключается в том, что исходя из начального условия находят сначала первые три значения искомой функции

$y_1,\ y_2,\ y_3$ («начальный отрезок»)

для значений независимого переменного $x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,$ $x_3 = x_0 + 3h$, пользуясь каким – нибудь известным методом (например, можно воспользоваться разложением решения y(x) в степенной ряд или найти эти значения методом последовательных приближений, или применить метод Рунге –

Кутта и т.п.). Затем вычисляют приближения $y_i^{(1)}$ и $y_i^{(2)}$ для последующих значений y_i ($i = 4, 5, 6, \ldots$) по формулам:

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

(первая формула Милна)

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2})$$

(вторая формула Милна), где

$$f_i = f(x_i, y_i), \quad \bar{f}_i = f(x_i, y_i^{(1)}).$$

Милн показал, что абсолютная погрешность значения $y_i^{(2)}$ приближенно равна

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29} \cdot \left| y_i^{(2)} - y_i^{(1)} \right|.$$

Эта формула позволяет на каждом шаге контролировать точность полученного результата. Если искомое решение требуется найти с точностью ε и окажется, что $\varepsilon_i \le \varepsilon$, то можно положить $y_i \approx y_i^{(2)}$ и перейти к вычислению y_{i+1}. В противном случае следует уменьшить шаг. При этом мы встретимся с неприятной необходимостью пересчета соответствующего «начального отрезка», другими словами начать вычисление сначала – в этом недостаток метода. Достоинство метода Милна: этот метод выгодно отличается от других методов (например, от метода Рунге – Кутта) тем, что в нем производится, как мы видели, корректирование каждого вновь полученного частного значения интеграла уравнения без пересчета с измененным шагом.

Поэтому он является одним из наиболее простых и практически удобных методов численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Пример 8. Методом Милна найти на отрезке [0; 0,5] решение дифференциального уравнения

$$y' = y + x,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$, приняв шаг $h = 0{,}1$.

Решение.

Из начального условия и самого уравнения определяем:

$y_0 = 1, \quad y_0' = 1.$

Три последующих значения y_1, y_2, y_3 найдем методом Рунге – Кутта: $y_1 = 1{,}1103$, $y_2 = 1{,}2427$, $y_3 = 1{,}3996$, $y_1' = 1{,}2103$, $y_2' = 1{,}4427$, $y_3' = 1{,}6996$.

Теперь можно вычислить y_4, пользуясь формулами Милна. По первой формуле

$$y_4^{(1)} = 1 + \frac{4 \cdot 0{,}1}{3}(2 \cdot 1{,}2103 + 2 \cdot 1{,}6996 - 1{,}4427) = 1{,}5836.$$

Подставим это значение в дифференциальное уравнение, получим:

$$\bar{f}_4 = 1{,}9836.$$

Вычисление $y_4^{(2)}$ производим по второй формуле Милна

$$y_4^{(2)} = 1{,}2427 + \frac{0{,}1}{3}(1{,}4427 + 1{,}9836 + 4 \cdot 1{,}6996) = 1{,}5835.$$

Так как значения $y_4^{(1)}$ и $y_4^{(2)}$ совпадают в первых трех десятичных знаках, то примем

$y_4 = y_4^{(2)} = 1{,}5835.$

Для вычисления y_5 поступим аналогично.

Вычисление $y_5^{(1)}$ произведем по первой формуле Милна

$$y_5^{(1)} = 1{,}1103 + \frac{4 \cdot 0{,}1}{3}(2 \cdot 1{,}4427 + 2 \cdot 1{,}9835 - 1{,}6996) = 1{,}7973,$$

следовательно,

$\bar{f}_5 = 0{,}5 + 1{,}7973 = 2{,}2973.$

Вычисление $y_5^{(2)}$ произведем по второй формуле Милна

$$y_5^{(2)} = 1{,}3996 + \frac{0{,}1}{3}(1{,}6996 + 2{,}2973 + 4 \cdot 1{,}4835) = 1{,}7973.$$

Поскольку значения $y_5^{(1)}$ и $y_5^{(2)}$ совпадают, то принимаем $y_5 = 1{,}7973.$

Итак, получен ответ:
$y_5 = 1{,}797$ при $x = 0{,}5.$

Ниже приводится таблица, по которой удобно производить вычисления по методу Милна.

Вычисление y_4 и y_5 по методу Милна.

i	x_i	$y_i^{(1)}$	$y_i^{(2)} = y_i$	ε_i	$\bar{f}_i = f(x_i, y_i^{(1)})$	$f_i = f(x_i, y_i)$
0	0,0		1,0000			1,0000
1	0,1		1,1103			1,2103
2	0,2		1,2427			1,4427
3	0,3		1,3996			1,6996
4	0,4	1,5836	1,5835	0	1,9836	1,9835
5	0,5	1,7973	1,7973	0	2,2973	2,2973

§ 7. Метод Адамса

Снова будем искать решение уравнения

$y' = f(x, y)$

на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Введем нужные для дальнейшего обозначения. Приближенные значения решения в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Первые разности или разности первого порядка:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \ldots, \quad \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}.$

Вторые разности, или разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1,$$
$$\ldots$$
$$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} = y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}.$$

Аналогично определяются разности третьего порядка и т.д. Через $y_0', y_1', \ldots, y_n'$ обозначим приближенные значения производных, через $y_0'', y_1'', \ldots, y_n''$ - приближенные значения вторых производных и т.д. Аналогично определяются первые разности производных

$$\Delta y_0' = y_1' - y_0', \quad \Delta y_1' = y_2' - y_1', \ldots, \Delta y_{n-1}' = y_n' - y_{n-1}',$$

вторые разности производных

$$\Delta^2 y_0' = \Delta y_1' - \Delta y_0', \quad \Delta^2 y_1' = \Delta y_2' - \Delta y_1', \ldots, \Delta^2 y_{n-2}' = \Delta y_{n-1}' - \Delta y_{n-2}'$$

и т.д.

Будем считать, что известны три значения функции y_0, y_1, y_2 (эти значения можно получить любым методом, обеспечивающим нужную точность: с помощью разложения решения в степенной ряд, методом Рунге – Кутта и т.д., но не методом Эйлера ввиду его недостаточной точности). На основании этих

значений определяем

$y_0' = f(x_0, y_0), \quad y_1' = f(x_1, y_1), \quad y_2' = f(x_2, y_2).$

Зная y_0', y_1', y_2', можно определить $\Delta y_0', \Delta y_1', \Delta y_2'$.

Тогда $$y_3 = y_2 + \frac{h}{1} y_2' + \frac{h}{2} \Delta y_1' + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_0 .$$

Допустим теперь, что нам известны значения решения y_0, y_1, y_2, …, y_k. На основании этих значений мы можем вычислить значения производных y_0', y_1', y_2',…, y_k', а следовательно, $\Delta y_0', \Delta y_1', \ldots, \Delta y_{k-1}'$ и $\Delta^2 y_0', \Delta^2 y_1', \ldots, \Delta^2 y'_{k-2}$.

Значение y_{k+1} определяем по формуле

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y_k' + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-2}.$$

Это и есть так называемая формула Адамса с четырьмя членами. Она дает возможность, зная y_k, y_{k-1}, y_{k-2}, определить y_{k+1}. Таким образом, зная y_0, y_1, y_2 мы можем найти y_3 и далее y_4, y_5,…

Укажем без доказательства, что если существует единственное решение уравнения

$$y' = f(x, y)$$

на отрезке $[x_0, b]$, удовлетворяющее начальным условиям, то погрешность приближенных значений, определенных по формуле Адамса, по абсолютной величине не превосходит Mh^4, где M – постоянная, зависящая от длины интервала и вида функции $f(x, y)$ и не зависящая от величины h.

Если мы хотим получить большую точность

вычисления, то следует брать больше слагаемых и формула Адамса соответствующим образом изменится. Так, если мы возьмем пять членов, то получим формулу

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{1} y'_k + \frac{h}{2} \Delta y'_{k-1} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y'_{k-2} + \frac{3h}{8} \Delta^2 y'_{k-3}.$$

Здесь y_{k+1} определяется через значения y_k, y_{k-1}, y_{k-2} и y_{k-3}. Таким образом, чтобы начать вычисления по этой формуле, нужно знать четыре первых значения решения y_0, y_1, y_2, y_3.

Пример 9. Найти приближенные значения решения уравнения

$$y' = y + x,$$

удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 1$. Значения решения определить при $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.

Решение.

Найдем сначала y_1 и y_2. Из уравнения и начальных данных получаем

$$y'_0 = (y + x)\big|_{x=0} = y_0 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

Дифференцируя данное уравнение, получим

$$y'' = y' + 1.$$

Следовательно,

$$y''_0 = (y' + 1)\big|_{x=0} = 1 + 1 = 2.$$

Дифференцируем еще раз:

$$y''' = y''$$

Следовательно,

$$y'''_0 = y''_0 = 2.$$

Из разложения функции $y = y(x)$ в ряд Маклорена получим

$$y = y_0 + y_0' \cdot x + \frac{y_0''}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{y_0'''}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots .$$

Подставляя в это равенство значения y_0, y_0', y_0'' и $x = 0{,}1$, получим

$$y_1 = 1 + 1 \cdot 0{,}1 + \frac{2}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}1^2 + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}2^3 = 1{,}1103.$$

Аналогично при $x = 0{,}2$ получим

$$y_2 = 1 + 1 \cdot 0{,}2 + \frac{2}{1 \cdot 2} \cdot 0{,}2^2 + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0{,}2^3 = 1{,}2427.$$

Зная y_0, y_1, y_2, на основании уравнения находим

$$y_0' = y_0 + x_0 = 1,$$

$$y_1' = y_1 + x_1 = 1{,}1103 + 0{,}1 = 1{,}2103,$$

$$y_2' = y_2 + x_2 = 1{,}2427 + 0{,}2 = 1{,}4427,$$

$$\Delta y_0' = 0{,}2103, \quad \Delta y_1' = 0{,}2324, \quad \Delta^2 y_0' = 0{,}0221.$$

Полученные значения заносим в таблицу:

x	y	y'	$\Delta y'$	$\Delta^2 y'$
$x_0 = 0$	$y_0 = 1{,}0000$	$y_0' = 1$		
			$\Delta y_0' = 0{,}2103$	
$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 1{,}1103$	$y_1' = 1{,}2103$		$\Delta^2 y_0' = 0{,}0221$
			$\Delta y_1' = 0{,}2324$	
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 1{,}2427$	$y_2' = 1{,}4427$		$\Delta^2 y_1' = 0{,}0244$
			$\Delta y_2' = 0{,}2568$	
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 1{,}3995$	$y_3' = 1{,}6995$		
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 1{,}5833$			

По формуле Адамса находим y_3:

$$y_3 = 1{,}2427 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1{,}4427 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}2324 + \frac{5 \cdot 0{,}1}{12} \cdot 0{,}0221 = 1{,}3995.$$

Далее находим значения y_3', $\Delta y_2'$, $\Delta^2 y_1'$. Снова по формуле Адамса находим y_4 :

$$y_4 = 1{,}3995 + \frac{0{,}1}{1} \cdot 1{,}6995 + \frac{0{,}1}{2} \cdot 0{,}2568 + \frac{5 \cdot 0{,}1}{12} \cdot 0{,}0244 = 1{,}5833.$$

Точное выражение решения данного уравнения:

$$y = 2e^x - x - 1.$$

Следовательно, $y \mid_{x=0,4} = 2e^{0,4} - 0{,}4 - 1 = 1{,}58364$. Абсолютная погрешность: 0,0003; относительная погрешность: $\frac{0{,}0003}{1{,}5836} \approx 0{,}0002 = 0{,}02\%$. (Для сравнения: абсолютная погрешность значения y_4 , вычисленного по методу Эйлера 0,06; относительная погрешность 0,038 = 3,8%).

Вид формулы и вычисления можно упростить, если ввести следующие обозначения. Обозначим

$q_0 = hy_0' = h \cdot f(x_0, y_0)$, $q_1 = hy_1' = h \cdot f(x_1, y_1)$,

$q_2 = hy_2' = h \cdot f(x_2, y_2)$, $q_3 = hy_3' = h \cdot f(x_3, y_3)$.

Составим диагональную таблицу конечных разностей величины q :

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x,y)$	$q = y'h$	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
x_0	y_0		$f(x_0, y_0)$	q_0			
		Δy_0			Δq_0		
x_1	y_1		$f(x_1, y_1)$	q_1		$\Delta^2 q_0$	
		Δy_1			Δq_1		$\Delta^3 q_0$

x_2	y_2		$f(x_2, y_2)$	q_2		$\Delta^2 q_1$	
		Δy_2			Δq_2		$\Delta^3 q_1$
x_3	y_3		$f(x_3, y_3)$	q_3		$\Delta^2 q_2$	
		Δy_3			Δq_3		$\Delta^3 q_2$
x_4	y_4		$f(x_4, y_4)$	q_4		$\Delta^2 q_3$	
		Δy_4			Δq_4		
x_5	y_5		$f(x_5, y_5)$	q_5			
		Δy_5					
x_6	y_6						

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса, которая примет вид:

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}.$$

Так, используя числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, расположенные в нижней косой строке, по формуле Адамса находят Δy_3. Найдя значение Δy_3, мы вычисляем $\Delta y_4 = y_3 + \Delta y_3$.Зная же x_4 и y_4, мы вычисляем $q_4 = h \cdot f(x_4, y_4)$, вносим y_4, Δy_3, q_4 в таблицу разностей и пополняем ее затем конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^2 q_1$, расположенными вместе с q_4 в новой косой строке.

Затем, используя числа новой строки, мы с помощью формулы Адамса вычисляем y_4, y_5 и q_5 и получаем следующую косую строку: Δq_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. С помощью этой строки мы вычисляем значение y_6 искомого решения $y(x)$ и т.д.

Пример 10. Используя метод Адамса, найти значение $y(0{,}4)$ с точностью до 0,01 для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + y^2$; $y(0) = -1$.

Решение.

Найдем первые четыре члена разложения решения данного уравнения в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$:

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{1}{2} y''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} y'''(0) \cdot x^3 + \dots .$$

Согласно условию, $y(0) = -1$; значения $y'(0)$, $y''(0)$, $y'''(0)$ находим, последовательно дифференцируя данное уравнение:

$y' = x^2 + y^2$; $\quad y'(0) = 0^2 + (-1)^2 = 1$,

$y'' = 2x + 2\,y\,y'$; $\quad y''(0) = 0 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$,

$y''' = 2 + 2\,y'^2 + 2\,y\,y''$; $\quad y'''(0) = 2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 8$.

Таким образом, $y(x) \approx -1 + x - x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \dots$.

Вычисляем $y(x)$ в точках $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 0{,}2$, $x_3 = 0{,}3$ с одним запасным (третьим) знаком: $y_1 = -0{,}909$, $y_2 = -0{,}829$, $y_3 = -0{,}754$. Составим таблицу

x	y	Δy	y'	q	Δq	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
0	-1		1	0,1			
		0,091			-0,017		
0,1	-0,909		0,836	0,083		0,006	
		0,080			-0,011		-0,002
0,2	-0,829		0,727	0,072		0,004	
		0,075			-0,007		
0,3	-0,754		0,659	0,065			
0,4							

Тогда $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0 =$

$$= 0{,}065 + \frac{1}{2}(-0{,}007) + \frac{5}{12} 0{,}004 + \frac{3}{8}(-0{,}002) = 0{,}062.$$

Следовательно, $y_4 = y_3 + \Delta y_3 = -0{,}754 + 0{,}062 = -\,0{,}692 \approx -0{,}69$.

§ 8. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотренные методы могут быть использованы при решении задачи Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пример 11.

Найти приближенные значения решений системы

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = y \end{cases}$$

с начальными условиями $y(0) = 0$, $z(0) = 1$. Вычислить значения решений при $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}4$.

Решение.

Из данных уравнений находим

$$y'(0) = z\big|_{x=0} = 1, \quad z'(0) = y\big|_{x=0} = 0.$$

Дифференцируя данные уравнения, найдем

$$y''(0) = z'\big|_{x=0} = 0,$$

$$z''(0) = y'\big|_{x=0} = 1,$$

$$y'''(0) = z''\big|_{x=0} = 1,$$

$$z'''(0) = y''\big|_{x=0} = 0.$$

Таким образом, первые четыре члена разложения функции $y(x)$ и $z(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ имеют вид:

$$y(x) = y(0) + y'(0)\cdot x + \frac{1}{2}y''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)\cdot x^3 + \ldots = x + \frac{1}{6}x^3 + \ldots;$$

$$z(x) = z(0) + z'(0)\cdot x + \frac{1}{2}z''(0)\cdot x^2 + \frac{1}{6}z'''(0)\cdot x^3 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots\ .$$

Подставляя в эти выражения $x = 0{,}1$ и $x = 0{,}2$, найдем

$$y_1 = 0{,}1 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}1^3 = 0{,}1002,$$

$$y_2 = 0{,}2 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}2^3 = 0{,}2013,$$

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 = 1{,}0050,$$

$$z_2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}2^2 = 1{,}0200.$$

На основании данных уравнений находим

$y_1' = 1{,}0050, \quad z_1' = 0{,}1002,$

$y_2' = 1{,}0200, \quad z_2' = 0{,}2013.$

Заполняем первые пять строк таблицы

x	y	Δy	y'	$q_y = y'h$	Δq_y	$\Delta^2 q_y$	z	Δz	z'	$q_z = z'h$	Δq_z	$\Delta^2 q_z$
0,0	0		1	0,1			1		0	0		
		0,10002			0,0005			0,0050			0,0100	
0,1	0,1002		1,005	0,1005		0,0010	1,0050		0,1002	0,0100		0,0001
		0,1011			0,0015			0,0150			0,0101	
0,2	0,2013		1,0200	0,1020			1,0200		0,2013	0,0201		
		0,1031			0,0025	0,0010		0,0252			0,0103	0,0002
0,3	0,3044		1,0452	0,1045			1,0452		0,3044	0,0304		
0,4												

Далее по формулам Адамса находим

$$\Delta y_2 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 = 0{,}1020 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0015 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}0010 = 0{,}1031,$$

$$\Delta z_2 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 = 0{,}0201 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0101 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}0001 = 0{,}0252.$$

Следовательно, $y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 0{,}2013 + 0{,}1031 = 0{,}3044,$

$z_3 = z_2 + \Delta z_2 = 1{,}0200 + 0{,}0252 = 1{,}0452.$

Аналогично

$$\Delta y_3 = 0{,}1045 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0025 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}0010 = 0{,}1062,$$

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 0{,}4107,$$

$$\Delta z_3 = 0{,}0304 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0103 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}0002 = 0{,}0356,$$

$$z_4 = z_3 + \Delta z_3 = 1{,}0808.$$

Очевидно, что точные решения данной системы уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям, будут

$y = \operatorname{sh} x, \quad z = \operatorname{ch} x.$

Поэтому пять верных после запятой знаков решений будут

$y_4 = \operatorname{sh} 0{,}4 = 0{,}41075, \qquad z_4 = \operatorname{ch} 0{,}4 = 1{,}08107.$

Так как уравнения высших порядков и системы уравнений высших порядков во многих случаях сводятся к системе уравнений первого порядка, то изложенные методы применимы к решению этих задач.

Пример 12. Решить задачу Коши на отрезке [3; 4], приняв шаг $h = 0{,}2$ для уравнения

$$y'' = -\frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} + 1$$

при начальных условиях $y(3) = 6,\ y'(3) = 3.$

Решение.

Приводим уравнение 2 – го порядка к системе двух уравнений 1 – го порядка, введя новую функцию $z = y'$:

$$\begin{cases} z' = -\dfrac{z}{x} + \dfrac{y}{x^2} + 1, \\ y' = z. \end{cases}$$

Начальные условия для данной системы: $y(3) = 6$, $z(3) = 3$.
Дифференцируя данные уравнения, найдем

$$z'' = -\frac{z'}{x} + \frac{z}{x^2} + \frac{y'}{x^2} - 2\frac{y}{x^3}, \qquad y'' = z',$$

$$z''' = -\frac{z''}{x} + 2\frac{z'}{x^2} - 2\frac{z}{x^3} + \frac{y''}{x^2} - 4\frac{y'}{x^3} + 6\frac{y'}{x^4}, \qquad y''' = z'.$$

Вычисляем значения производных в точке $x = 3$:

$$y'(3) = 3, \qquad z'(3) = \frac{2}{3},$$

$$y'''(3) = \frac{2}{3}, \qquad z''(3) = 0,$$

$$y'''(3) = 0, \qquad z'''(3) = -\frac{2}{9}.$$

Исходя из разложений функций $y(x)$ и $z(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 3$

$$y(x) = 6 + 3\Delta x + \frac{1}{3}\Delta x^2,$$

$$z(x) = 3 + \frac{2}{3}\Delta x \ -\frac{1}{27}\Delta x^3,$$

вычислим значения функций $y(3,2)$, $z(3,2)$, $y(3,4)$, $z(3,4)$:

$$y(3,2) = 6 + 3 \cdot 0,2 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 = 6,613,$$

$$z(3,2) = 3 + \frac{2}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{27} \cdot 0,008 = 3,133,$$

$$y(3,4) = 6 + 3 \cdot 0,4 + \frac{1}{3} \cdot 0,16 = 7,253,$$

$$z(3,4) = 3 + \frac{2}{3} \cdot 0,4 - \frac{1}{27} \cdot 0,064 = 3,264.$$

Заполняем таблицу:

x	y	Δy	y'	q_y	Δq_y	$\Delta^2 q_y$	z	Δz	z'	q_z	Δq_z	$\Delta^2 q_z$
3,0	6		3	0,6			3		0,6666	0,1333		
3,2	6,613	0,613	3,133	0,6266	0,0266	-0,0004	3,133	0,133	0,6667	0,1333	0	0,0002
3,4	7,253	0,640	3,264	0,6528	0,0262		3,264	0,131	0,6674	0,1335	0,0002	
3,6												
3,8												

По формуле Адамса вычисляем

$$\Delta y_2 = q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 q = 0,6528 + \frac{1}{2} \cdot 0,0262 + \frac{5}{12}(-0,0004) = 0,6657,$$

$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = 7,253 + 0,6657 = 7,9187;$

$$\Delta z_2 = q_2 + \frac{1}{2}\Delta q_1 + \frac{5}{12}\Delta^2 q = 0{,}1335 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0002 + \frac{5}{12}\cdot 0{,}0002 = 0{,}1335,$$

$z_3 = z_2 + \Delta z_2 = 3{,}264 + 0{,}1335 = 3{,}3975.$

Заполняем следующую косую строку таблицы, по ней вычисляем Δy_3 и Δz_3 и т.д.

Итак, ответ: $y(3) = 6$, $y(3{,}2) = 6{,}613$, $y(3{,}4) = 7{,}253$, $y(3{,}6) = 7{,}924$ и т.д.

Упражнения и задачи

5.1. Найти в виде ряда решение уравнения $y'' = x^2 y$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

5.2. Найти первые четыре члена ряда, определяющего решение уравнения Риккати $y' = 1 + x - y^2$ с начальными условиями $y(0) = 1$.

5.3. Написать в виде ряда решение уравнения Бесселя $xy'' + y' + xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.4. Написать первые три члена ряда, определяющие решение уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$.

5.5. Написать в виде ряда решение уравнения $y'' + xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Найти несколько первых членов разложения в степенной ряд решений при указанных начальных условиях.

5.6. $y' = y^3 - x$, $y(0) = 1$. **5.7.** $y' = x^2 y^2 - 1$, $y(0) = 1$.

5.8. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$. **5.9.** $y' = \dfrac{1 - x^2}{y} + 1$, $y(0) = 1$.

5.10. $y' = \dfrac{xy}{1 + x + y}$, $y(0) = 0$. **5.11.** $y' = e^y + xy$, $y(0) = 0$.

5.12. $y' = \sin y - \sin x$, $y(0) = 0$. **5.13.** $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$, $y(1) = 1$.

5.14. Найти шесть первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' = \dfrac{y'}{y} - \dfrac{1}{x}$, удовлетворяющего начальным условиям $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

5.15. Найти в форме степенного ряда частное решение уравнения $y'' = x \sin y'$, удовлетворяющее начальным условиям

$y(1) = 0$, $y'(1) = \frac{\pi}{2}$. (Ограничиться шестью первыми членами).

5.16. Найти в форме степенного ряда частное решение $y = f(x)$ уравнения $y'' = xyy'$, удовлетворяющее начальным условиям $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Если ограничиться пятью первыми членами разложения, то будет ли этого достаточно для вычисления $f(-0,5)$ с точностью до 0,001?

5.17. Найти семь первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $yy'' + y' + y = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Какого порядка малости будет при $x \to 0$ разность $y - (2 - x - e^{-x})$?

5.18. Найти 12 первых членов разложения в ряд решения дифференциального уравнения $y'' + yy' - 2 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Вычислить интеграл $\int_0^1 y\,dx$ с точность до 0,001. Вычислить $y'(0,5)$ с точностью до 0,00001.

5.19. Найти шесть первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' - (1 + x^2)y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

5.20. Найти девять первых членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y'' = x^2y - y'$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

5.21. Записать в виде степенного ряда частное решение уравнения $y'' - xy' + y - 1 = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

5.22. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' = y \cdot e^x$. (Ограничиться шестью первыми членами).

5.23. Записать в виде степенного ряда общее решение уравнения $y'' + xy' - x^2y = 0$. (Ограничиться шестью первыми членами).

Найти последовательные приближения решений указанных ниже дифференциальных уравнений.

5.24. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ (три приближения).

5.25. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$ (два приближения).

5.26. $y' = x + y,\ y(0) = 0.$

5.27. $y' + y \cdot \mathrm{ch}x = 0,\ \ y(0) = 1.$

5.28. $y' = x - y,\ y(0) = 1.$

5.29. $y' = y \cdot \cos x,\ y(0) = 1.$

5.30. $y' = 2xy\cos(x^2),\ y(0) = 1.$

5.31. $y' = y^2 + xy + x^2,\ y(0) = 1$ (два приближения).

5.32. $y' = xy^3 - 1,\ y(0) = 0$ (три приближения).

Используя метод Эйлера, найти значения функции y, определяемой дифференциальным уравнением при указанных начальных условиях с заданным шагом.

5.33. $y' = \dfrac{y - x}{y + x},\qquad y(0) = 1,\ h = 0{,}1$ (четыре значения).

5.34. $y' = 1 + x + y^2,\ \ y(0) = 1,\ h = 0{,}1$ (три значения).

5.35. $y' = x^2 + y^3,\qquad y(0) = 0,\ h = 0{,}1$ (четыре значения).

5.36. $y' = y^2 + \dfrac{y}{x},\qquad y(2) = 4,\ h = 0{,}1$ (четыре значения).

5.37. $y' = \dfrac{(x + y)(1 - xy)}{x + 2y},\quad y(0) = 1,\ h = 0{,}2$ (пять значений).

Методом Рунге-Кутта с указанным шагом вычислить приближенно для указанных промежутков решения дифференциальных уравнений.

5.38. $y' = y - x,\qquad y(0) = 1{,}5,\ \ h = 0{,}2,\ \ x \in [0;1]$.

5.39. $y' = \dfrac{y}{x} - y^2,\qquad y(1) = 1,\ \ h = 0{,}2,\ \ x \in [1;2]$.

5.40. $4y' = y^2 + 4x^2,\ \ y(0) = 1,\ \ h = 0{,}1,\ \ x \in [0;1]$.

5.41. $y' = \dfrac{x}{y} + 0{,}5y,\ \ y(0) = 1,\ \ h = 0{,}1,\ \ x \in [0;1]$.

Найти с точностью до 0,0001 решение дифференциального уравнения 1-го порядка с указанными начальными условиями на заданном отрезке:

а) методом Эйлера,

б) методом Рунге-Кутта,

в) методом Милна.

5.42. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$, $x \in [0;1]$.

5.43. $y' - 2y = 3e^x$, $y(0,3) = 1,415$, $x \in [0,3;0,6]$.

5.44. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0;0,3]$.

5.45. $y' = y^2 - x^2$, $y(1) = 1$, $x \in [1;2]$.

5.46. $y' = y^2 + x^2$, $y(0) = 0,27$, $x \in [0;1]$.

5.47. $y' + xy(1 - y^2) = 0$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0;1]$.

5.48. $y' = x^2 - xy + y^2$, $y(0) = 0,1$, $x \in [0;1]$.

5.49. $y' = \dfrac{2y - x}{y}$, $y(1) = 2$, $x \in [1;2]$.

5.50. $y' = x^2 + xy + y^2 + 1$, $y(0) = 0$, $x \in [0;1]$.

5.51. $y' + y = x^3$, $y(1) = -1$, $x \in [1; 2]$.

5.52. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$, $x \in [0; 0,1]$.

5.53. $y' = 2xy + x^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0; 0,5]$.

5.54. $y' = x + \sin\dfrac{y}{3}$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 2]$.

5.55. $y' = e^x - y^2$, $y(0) = 0$, $x \in [0; 0,4]$.

5.56. $y' = 2x + \cos y$, $y(0) = 0$, $x \in [0; 0,1]$.

5.57. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0; 0,5]$.

5.58. $y' = xy^3 - y$, $y(0) = 1$, $x \in [0; 1]$.

5.59. $y' = y^2 \cdot e^x - 2y, \quad y(0) = 1, \quad x \in [0; 1].$

5.60. $y' = \dfrac{1}{y^2 - x}, \quad y(1) = 0, \quad x \in [1; 2].$

Применяя метод Адамса, вычислить с точностью до 0,01 значения решений указанных дифференциальных уравнений и систем при указанных значениях аргумента:

5.61. $y' = x^2 + y, \quad y(0) = 1.$ Вычислить $y(1)$.

5.62. $y' = 2y - 3, \quad y(0) = 1.$ Вычислить $y(0,5)$.

5.63. $y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0.$ Вычислить $y(0,4)$.

5.64. $\begin{cases} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z; \end{cases} \quad y(0) = 2, \ z(0) = -2.$

Вычислить $y(0,5), \ z(0,5)$.

5.65. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z; \end{cases} \quad y(0) = 2, \ z(0) = -1.$

Вычислить $y(0,5), \ z(0,5)$.

5.66. $\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x}, \\ z' = \dfrac{2z^2}{x(y-1)} + \dfrac{z}{x}; \end{cases} \quad y(1) = 0, \ z(1) = \dfrac{1}{3}.$

Вычислить $y(2), z(2)$.

5.67. $\begin{cases} y' = (z - y)x, \\ z' = (z + y)x; \end{cases} \quad y(0) = 1, \ z(0) = 1.$

Вычислить $y(1), \ z(1)$.

5.68. $\begin{cases} y' = \cos(y + 2z) + 2, \\ z' = \dfrac{2}{x + 2y^2} + x + 1; \end{cases} \quad y(0) = 1, \ z(0) = 0{,}05.$

Вычислить $y(0{,}3), \ z(0{,}3)$.

5.69. $\begin{cases} y' = e^{-(y^2+z^2)} + 2x, \\ z' = 2y^2 + z; \end{cases}$ $y(0) = 0{,}5, \quad z(0) = 1.$

Вычислить $y(0{,}3), \quad z(0{,}3).$

5.70. $y'' - y = e^x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0{,}5.$

Вычислить $y(1).$

5.71. $y'' - 2y' = x^2 - 1; \quad y(1) = -\frac{1}{6}, \quad y'(1) = -\frac{3}{4}.$

Вычислить $y(2).$

5.72. $y'' = 2 - y; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$

Вычислить $y(1).$

5.73. $y^3 y'' + 1 = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$

Вычислить $y(1{,}5).$

5.74. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{2}\cos 2t = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

Вычислить $x(\pi)$ и $x'(\pi).$

Ответы

5.1. $y = 1 + x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$

5.2. $y = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} - \ldots$

5.3. $y = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^6 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$

5.4. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3^2 \cdot 7} + \frac{2x^{11}}{3^3 \cdot 7 \cdot 11} + \ldots$

5.5. $y = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{1 \cdot 4 \cdot x^6}{6!} - \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot x^9}{9!} + \ldots$

5.6. $y = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \ldots$

5.7. $y = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + \ldots$

5.8. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7\cdot 9}x^7 - \frac{2}{7\cdot 11\cdot 27}x^{11} - \ldots$

5.9. $y = 1 + 2x - x^2 + \frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \ldots$

5.10. $y = 0.$

5.11. $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{11x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$

5.12. $y = -\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^6}{6!} - \ldots$

5.13. $y = 1 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \frac{4(x-1)^4}{4!} - \frac{60(x-1)^5}{5!} + \ldots$

5.14. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{2(x-1)^4}{4!} + \frac{3(x-1)^5}{5!} + \ldots$

5.15. $y = \frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{(x-1)^4}{4!} - \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

5.16. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$

Если $f(x) \approx 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \ldots$, то при $x = -0{,}5$ получается знакочередующийся числовой ряд и значение первого из отброшенных членов меньше чем 0,001.

5.17. $y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots$; пятого.

5.18. $y = x^2 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{80}x^8 - \frac{7}{4400}x^{11} + \ldots$; 0,318; 0,96951.

5.19. $y = -2 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{7x^5}{60} - \ldots$

5.20. $y = 1 + \frac{2x^4}{4!} - \frac{2x^5}{5!} + \frac{2x^6}{6!} - \frac{2x^7}{7!} + \frac{62x^8}{8!} - \ldots$

5.21. $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{3x^6}{6!} + \dfrac{5x^8}{8!} + \ldots + \dfrac{(2n-1)x^{2n+2}}{(2n+2)!} + \ldots$

5.22. $y = c_1\left(1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{24} + \ldots\right) + c_2\left(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^5}{30} + \ldots\right).$

5.23. $y = c_1(1 + \dfrac{x^4}{12} + \ldots) + c_2(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40} + \ldots).$

5.24. $y_1(x) = \dfrac{x^3}{3}, \qquad y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63},$

$y_3(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63} + \dfrac{2x^{11}}{2079} + \dfrac{x^{15}}{59535}.$

5.25. $y_1(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}, \quad y_2(x) = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{20}x^5.$

5.26. $y_n(x) = \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \ldots + \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$

5.27. $y = e^{-\mathrm{shx}}.$

5.28. $y_n(x) = 1 - x + 2(\dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \dfrac{x^n}{n!}) + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!},$

$n \geq 3.$

5.29. $y_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \dfrac{\sin^m x}{m!}.$

5.30. $y_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \dfrac{\sin^m (x^2)}{m!}.$

5.31. $y_2(x) = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{13}{24}x^4 + \dfrac{1}{4}x^5 + \dfrac{1}{18}x^6 + \dfrac{1}{63}x^7.$

5.32. $y_3(x) = -x - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^7}{35}.$

5.33.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

5.34.

x	0	0,1	0,2	0,3
y	1	1,2	1,45	1,78

5.35.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	0	0	0,001	0,005	0,014

5.36.

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	4	5,8	9,44	18,78	54,86

5.37.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	1	1,1	1,18	1,24	1,27	1,27

5.38. $y(1) = 3,36$. **5.39.** $y(2) = 0,80$.

5.40.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	-1	-0,975	-0,949	-0,921	-0,888	-0,842	-0,802	-0,744	-0,675	-0,593	-0,495

5.41.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1,05	1,12	1,20	1,29	1,39	1,50	1,62	1,75	1,89	2,03

5.42. $y(1) = 1,3280$.
5.43. $y(0,6) = 4,4828$.
5.44. $y(0,3) = 0,0451$.
5.45. $y(2) = -0,8407$.
5.46. $y(1) = 0,7899$.
5.47. $y(1) = 0,3305$.
5.48. $y(1) = 0,3635$.
5.49. $y(2) = 3,4547$.
5.50. $y(1) = 3,7190$.
5.51. $y(2) = 2,3683$.
5.52. $y(0,1) = 0,1057$.
5.53. $y(0,5) = 0,0461$.
5.54. $y(2) = 4,2489$.
5.55. $y(0,4) = 0,4647$.
5.56. $y(0,1) = 0,1098$.
5.57. $y(0,5) = 0,6842$.
5.58. $y(1) = 0,4388$.
5.59. $y(1) = 0,3679$.
5.60. $y(2) = -0,7895$.
5.61. $y(1) = 3,15$.
5.62. $y(0,5) = 0,14$.
5.63. $y(0,4) = 0,02$.
5.64. $y(0,5) = 3,15; z(0,5) = -3,15$
5.65. $y(0,5) = 0,55; z(0,5) = -0,18$.

5.66. $y(2) = 0{,}25$; $z(2) = 0{,}375$ **5.67.** $y(1) = 1{,}261$; $z(1) = 2{,}346$.
5.68. $y(0{,}3) = 1{,}505$; $z(0{,}3) = 0{,}577$. **5.69.** $y(0{,}3) = 0{,}638$; $z(0{,}3) = 1{,}568$.

5.70. $y(1) = 1{,}359$. **5.71.** $y(2) = -1{,}833$.
5.72. $y(1) = 1{,}16$. **5.73.** $y(1{,}5) = 0{,}87$.
5.74. $x(\pi) = 3{,}58; x'(\pi) = 0{,}79$.

ГЛАВА 6

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ

Часто функция, которую требуется разложить в ряд Фурье, задается таблично или графически, т.е. приближенно. В этом случае коэффициенты Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2,\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

можно вычислить лишь приближенно.

Аналогичная задача возникает и в случае, когда функция задается аналитически, но интегралы либо не интегрируются в элементарных функциях, либо слишком сложны.

В этих случаях для функции, заданной на отрезке $[0;2\pi]$ часто прибегают к так называемой схеме двенадцати ординат. Вычисления, согласно этой схеме, ведутся следующим образом.

I. Делим отрезок $[0;2\pi]$ на 12 равных частей, получаем точки деления $x_k = \frac{\pi}{6}k$ $(k = 0, 1, \ldots, 11)$.

II. Вычисляем значения данной функции в точках деления $y_k = f(x_k)$. При этом рекомендуется составить отдельную таблицу.

III. Записываем числа y_k в две строки так, как указано в таблице, и над числами, стоящими в одном столбце, производим

сначала сложение, затем вычитание. Результаты записываем в две строки:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
суммы $\oplus$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
разности Θ		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

IV. Выписываем числа u_k, v_k в две таблицы и над ними аналогичным образом проводим сложение и вычитание:

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_5	u_4	
суммы $\oplus$	s_0	s_1	s_2	s_3
разности Θ	t_0	t_1	t_2	

	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
суммы $\oplus$	σ_1	σ_2	σ_3
разности Θ	τ_1	τ_2	

V. Используя полученные числа, вычисляем коэффициенты a_n ($n = 0, 1, 2, 3$), b_n ($n = 0, 1, 2, 3$) по формулам:

$$6a_0 = s_0 + s_1 + s_2 + s_3, \qquad 6b_1 = 0{,}5\,\sigma_1 + 0{,}866\,\sigma_2 + \sigma_3,$$

$$6a_1 = t_0 + 0{,}866\,t_1 + 0{,}5\,t_2, \qquad 6b_2 = 0{,}866\,(\tau_1 + \tau_2),$$

$$6a_2 = s_0 - s_3 + 0{,}5(s_1 - s_2), \qquad 6b_3 = \sigma_1 - \sigma_3,$$

$$6a_3 = t_0 - t_2,$$

где $0{,}866 \approx \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{30}$.

Отсюда получим

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Отметим, что применение схемы к гладким функциям, для которых известны точные значения коэффициентов Фурье, дает приближенные значения коэффициентов a_0, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 весьма близкие к точным. Это обстоятельство дает указание на то, что в практических целях можно часто обращаться к схеме двенадцати ординат.

Для более точных результатов, а также в случаях, когда требуется большее число коэффициентов Фурье, употребляют схемы с большим числом ординат, например, схема с 24 ординатами.

Пример 1. Найти многочлен Фурье для функции $y = f(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$, заданной таблицей

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	-18	-23	-27	-24	8	32

Решение.

Составляем таблицы:

y	38	38 32	12 8	4 -24	14 -27	4 -23	-18
$\oplus u$ Θv	38	70 6	20 4	-20 28	-13 41	-19 27	-18

u	38 -18	70 -19	20 -13	-20
$\oplus s$ Θt	20 56	51 89	7 33	-20

v	6 27	4 41	28
$\oplus \sigma$ $\Theta \tau$	33 -21	45 -37	28

Вычисляем коэффициенты:

$6a_0 = 20 + 51 + 7 - 20,$ $\qquad 6b_1 = 0{,}5 \cdot 33 + 0{,}866 \cdot 45 + 28,$

$6a_1 = 56 + 0{,}866 \cdot 89 + 0{,}5 \cdot 33,$ $\qquad 6b_2 = 0{,}866(-21-37),$

$6a_2 = 20 + 20 + 0{,}5(51 - 7),$ $\qquad 6b_3 = 33 - 28.$

$6a_3 = 56 - 33,$

Имеем $a_0 = 9{,}7;$ $a_1 = 24{,}9;$ $a_2 = 10{,}3;$ $a_3 = 3{,}8;$

$b_1 = 13{,}9;$ $b_2 = -8{,}4;$ $b_3 = 0{,}8.$

Следовательно,

$$f(x) \approx 4{,}8 + (24{,}9\cos x + 13{,}9\sin x) + (10{,}3\cos 2x - 84\sin 2x) + \\ + (3{,}8\cos 3x + 0{,}8\sin 3x)$$

Пример 2. Вычислить приближенно, с точностью до 0,01, коэффициенты Фурье функции

$$y = 5 \cdot e^{-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}, \qquad (0 \le x \le 2\pi),$$

используя схему двенадцати ординат.

Решение.

Делим отрезок $[0;2\pi]$ на 12 частей и записываем значения абсцисс точек деления в первой строке таблицы.

Вычисляем $y_k = f(x_k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 11)$. Результаты помещаем в таблицу.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
y	5	4,965	4,860	4,700	4,475	4,210	3,895	3,560	3,205	2,845	2,500	2,000

Составляем схемы.

y	5	4,965 2,000	4,860 2,500	4,700 2,845	4,475 3,205	4,210 3,560	3,895
$\oplus u$ Θv	5	6,965 2,965	7,360 2,360	7,545 1,855	7,680 1,270	7,770 0,650	3,895

u	5 3,895	6,965 7,770	7,360 7,680	7,545
$\oplus s$ Θt	8,895 1,105	14,735 -0,805	15,040 -0,320	7,545

v	2,965 0,650	2,360 1,270	1,855
$\oplus \sigma$ $\Theta \tau$	3,615 2,315	3,630 1,090	1,855

Используя полученные числа, вычисляем коэффициенты Фурье. Результаты записываем с двумя знаками после запятой:

$6a_0 = 46{,}215;$ $\quad a_0 = 7{,}70;$

$6a_1 = 0{,}24787;$ $\quad a_1 = 0{,}04;$

$6a_2 = 1{,}1975;$ $\quad a_2 = 0{,}20;$

$6a_3 = 1{,}425;$ $\quad a_3 = 0{,}24;$

$6b_1 = 6{,}80608;$ $\quad b_1 = 1{,}13;$

$6b_2 = 2{,}94873;$ $\quad b_2 = 0{,}49;$

$6b_3 = 1{,}76;$ $\quad b_3 = 0{,}29.$

Тогда имеем:

$$f(x) = 5e^{-\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2} \approx 3{,}85 + (0{,}04\cos x + 1{,}13\sin x) +$$
$$+ (0{,}20\cos 2x + 0{,}49\sin 2x) + (0{,}24\cos 3x + 0{,}29\sin 3x).$$

Упражнения и задачи.

Пользуясь схемой 12 ординат найти многочлены Фурье для следующих функций, заданных на отрезке $[0,2\pi]$ таблицами своих значений, соответствующих равноотстоящим значениям аргумента ($y_0 = y_{12}$):

6.1. $y_0 = -7200$ $y_3 = 4300$ $y_6 = 7400$ $y_9 = 7600$
$y_1 = 300$ $y_4 = 0$ $y_7 = -2250$ $y_{10} = 4500$
$y_2 = 700$ $y_5 = -5200$ $y_8 = 3850$ $y_{11} = 250$

6.2. $y_0 = 0$ $y_3 = 9,72$ $y_6 = 7,42$ $y_9 = 5,60$
$y_1 = 6,68$ $y_4 = 8,97$ $y_7 = 6,81$ $y_{10} = 4,88$
$y_2 = 9,68$ $y_5 = 8,18$ $y_8 = 6,22$ $y_{11} = 3,67$

6.3. $y_0 = 2,714$ $y_3 = 1,273$ $y_6 = 0,370$ $y_9 = -0,357$
$y_1 = 3,042$ $y_4 = 0,788$ $y_7 = 0,540$ $y_{10} = -0,437$
$y_2 = 2,134$ $y_5 = 0,495$ $y_8 = 0,191$ $y_{11} = 0,767$

6.4. Разложить в ряд Фурье по схеме 12 ординат функцию, заданную графически (рис.6.1).

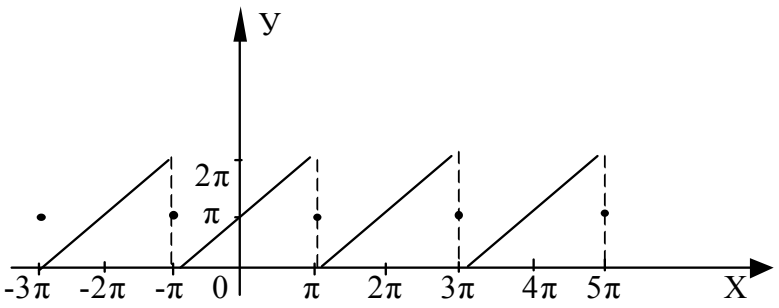


Рис. 6.1.

6.5. Вычислить несколько первых коэффициентов Фурье по схеме 12 ординат для следующих функций:

а) $f(x) = \dfrac{1}{2\pi^2}(x^3 - 2\pi x^2 + 2\pi^2 x)$ $\qquad (0 \le x \le 2\pi)$,

б) $f(x) = \dfrac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$ $\qquad (0 \le x \le 2\pi)$.

6.6. Функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ заданы в интервале $[0,2\pi)$ следующей таблицей:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
$f_1(x)$	27	32	35	30	26	20	18	22	26	30	32	36
$f_2(x)$	0,43	0,87	0,64	0,57	0,28	0	-0,30	-0,64	-0,25	0,04	0,42	0,84
$f_3(x)$	2,3	3,2	2,1	1,6	-0,4	-0,2	-0,4	0,3	0,7	0,9	1,2	1,6

Найти приближенное выражение этих функций в виде тригонометрического многочлена второго порядка.

Ответы.

6.1. 429+1739cos$x$-1037sin$x$-6321cos2x+1263sin2x-1242cos3x-33sin3x.

6.2. 6,49-1,96cos$x$+2,14sin$x$-1,68cos2x+0,53sin2x-1,13cos3x+0,04sin3x.

6.3. 0,960+0,851cos$x$+0,915sin$x$+0,542ccos2x+0,620sin2x+0,271cos3x+

+0,100sin3x.

6.4. $\pi + 2(\sin x - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3})$.

6.5. а) 0,608sin$x$ + 0,076sin2x + 0,022sin3x;

б) 0,338 + 0,414cos$x$ + 0,111cos2x + 0,056cos3x.

6.6. $f_1(x) \approx 27{,}8 + 6{,}5 \cos x - 0{,}1 \sin x - 3{,}2 \cos 2x + 0{,}1 \sin 2x$;

$f_2(x) \approx 0{,}24 + 0{,}55 \cos x + 0{,}25 \sin x - 0{,}08 \cos 2x - 0{,}13 \sin 2x$;

$f_3(x) \approx 0{,}12 + 1{,}32 \cos x + 0{,}28 \sin x - 0{,}07 \cos 2x + 0{,}46 \sin 2x$.

ГЛАВА 7
МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

§ 1. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости $y = f(x)$:

x_0	x_1	x_2	…	x_n
y_0	y_1	y_2	…	y_n

Нужно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически.

Можно, разумеется, применить метод интерполяции: построить интерполяционный многочлен (например, Лагранжа или Ньютона), значения которого в точках x_1, x_2, …, x_n будут совпадать с соответствующими значениями $f(x)$ из таблицы. Однако совпадение значений в узлах иногда может вовсе не означать совпадения характеров поведения исходной и интерполирующей функций. Требование неукоснительного совпадения значений в узлах выглядит тем более неоправданным, если значения функции $f(x)$ получены в результате измерений и являются приближенными.

Поставим сейчас задачу так, чтобы с самого начала обязательно учитывался характер исходной функции: найти функцию заданного вида:

$$y = F(x),$$

которая в точках x_1, x_2, …, x_n принимает значения как можно более близкие к табличным значениям y_1, y_2, …, y_n.

Практически вид приближающей функции F можно определить следующим образом. По табличным данным строится точечный график функции $f(x)$, а затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек (рис. 7.1). По полученной таким образом кривой устанавливается вид приближающей функции (обычно из числа простых по виду аналитических функций).

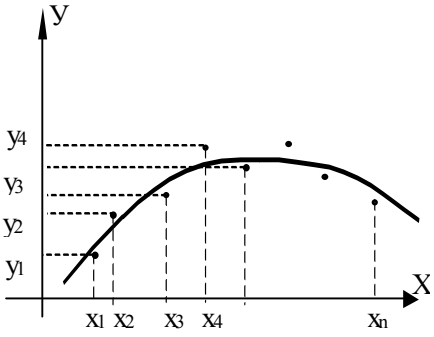


Рис. 7.1.

Следует заметить, что строгая функциональная зависимость для экспериментально полученной таблицы наблюдается редко, ибо каждая из участвующих в ней величин может зависеть от многих случайных факторов. Однако формула $y = F(x)$ (ее называют **эмпирической** формулой или **уравнением регрессии** y на x) интересна тем, что позволяет находить значения функции $f(x)$ для нетабличных значений x, «сглаживая» результаты измерений величины y. Оправданность такого подхода определяется в конечном счете практической полезностью полученной формулы.

Широко распространенным методом решения данной задачи является **метод наименьших квадратов**. Этот метод заключается в следующем. Предположим, что приближающая функция $F(x)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеет значения

$$\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n.$$

Требование близости табличных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и значений $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ можно истолковать следующим образом. Будем рассматривать совокупность значений функции $f(x)$ и совокупность $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ как координаты двух точек n-мерного пространства. С учетом этого задача приближения функции может быть переформулирована следующим образом: найти такую функцию $F(x)$ заданного вида, чтобы расстояние между точками $M(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $\overline{M}(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n)$ было наименьшим. Воспользовавшись метрикой евклидова пространства, приходим к требованию, чтобы величина

$$\sqrt{(y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \overline{y}_n)^2}$$

была наименьшей, что равносильно следующему: сумма квадратов

$$(y_1 - \overline{y}_1)^2 + (y_2 - \overline{y}_2)^2 + \ldots + (y_n - \overline{y}_n)^2$$

должна быть наименьшей.

Итак, задача приближения функции $f(x)$ теперь формулируется следующим образом: для функции $f(x)$ заданной таблично, найти функцию $F(x)$ определенного вида так, чтобы сумма квадратов была наименьшей.

Эта задача и носит название приближения функции **методом наименьших квадратов** .

В качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции $f(x)$ часто используют следующие функции:

1) $y = ax + b$;

2) $y = ax^2 + bx + c$;

3) $y = ax^m$;

4) $y = ae^{mx}$;

5) $y = \dfrac{1}{ax + b}$;

6) $y = a\ln x + b$;

7) $y = \dfrac{a}{x} + b$;

8) $y = \dfrac{x}{ax + b}$.

Здесь a, b, c, m – параметры. Когда вид приближающих функций установлен, задача сводится только к отысканию значений параметров.

Рассмотрим метод нахождения параметров приближающей функции в общем виде на примере приближающей функции с тремя параметрами:

$$y = F(x, a, b, c).$$

Итак, имеем: $F(x_i, a, b, c) = \bar{y}_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. Сумма квадратов разностей соответствующих значений функций $f(x)$ и $F(x)$ будет иметь вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - F(x_i, a, b, c) \right]^2 = \Phi(a, b, c).$$

Эта сумма является функцией $\Phi(a, b, c)$ трех переменных (параметров a, b, и c). Задача сводится к отысканию ее

минимума. Используем необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0\,, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0\,,$$

т.е.
$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_a(x_i, a, b, c) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_b(x_i, a, b, c) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i, a, b, c)\right]\cdot F'_c(x_i, a, b, c) = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Решив эту систему трех уравнений с тремя неизвестными относительно параметров *a, b* и *c,* мы и получим конкретный вид искомой функции *F*(*x, a, b, c*). Как видно из рассмотренного примера, изменение количества параметров не приведет к искажению сущности самого подхода, а выразится лишь в изменении количества уравнений в системе.

Естественно ожидать, что значения найденной функции *F*(*x, a, b, c*) в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут отличаться от табличных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значения разностей

$$y_1 - F(x, a, b, c) = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

называются **отклонениями** (или **уклонениями**) измеренных значений y от вычисленных по формуле $y = F(x, a, b, c)$. Для найденной эмпирической формулы в соответствии с исходной таблицей можно, следовательно, найти сумму квадратов отклонений
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2\,,$$

которая в соответствии с принципом наименьших квадратов для заданного вида приближающей функции (и найденных значений параметров *a, b* и *c*) должна быть наименьшей.

Из двух разных приближений одной и той же табличной функции, следуя принципу наименьших квадратов, лучшим нужно считать то, для которого сумма σ имеет наименьшее значение.

§ 2. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратного трехчлена (линейная и квадратичная регрессии)

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, b) = ax + b.$$

Найдем частные производные по параметрам

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = 1.$$

Составим теперь систему вида (1):

$$\sum(y_i - ax_i - b)x_i = 0,$$
$$\sum(y_i - ax_i - b) = 0.$$

(Сумма здесь и дальше берется по параметру i в пределах от 1 до n.) Далее имеем:

$$\sum x_i y_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0,$$
$$\sum y_i - a\sum x_i - nb = 0$$

или, деля каждое уравнение на n:

$$(\frac{1}{n}\sum x_i^2) \cdot a + (\frac{1}{n}\sum x_i) \cdot b = \frac{1}{n}\sum x_i y_i,$$

$$(\frac{1}{n}\sum x_i)\cdot a + b = \frac{1}{n}\sum y_i.$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{n}\sum x_i = M_x, \qquad \frac{1}{n}\sum y_i = M_y,$$

$$\frac{1}{n}\sum x_i y_i = M_{xy}, \qquad \frac{1}{n}\sum x_i^2 = M_{x^2}. \qquad (2)$$

Тогда последняя система будет иметь вид:

$$M_{x^2}\cdot a + M_x \cdot b = M_{xy},$$

$$M_x \cdot a + b = M_y.$$

Коэффициенты этой системы M_x, M_y, M_{x^2}, M_{xy} – числа, которые в каждой конкретной задаче приближения могут быть легко вычислены по формулам (2), где x_i, y_i - табличные значения. Решив полученную систему, получим значения параметров a и b, а следовательно, и конкретный вид линейной функции.

Пример 1. Пусть на основании эксперимента получены четыре значения искомой функции $y = f(x)$ при четырех значениях аргумента ($n = 4$), которые записаны в таблице:

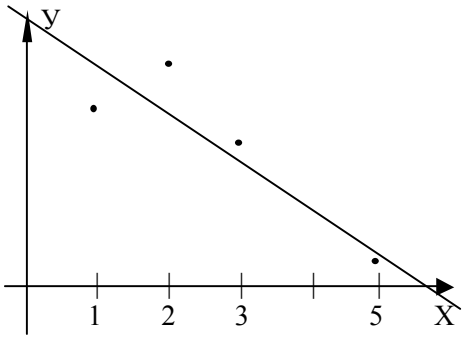


Рис. 7.2.

x	1	2	3	5
y	3	4	2,5	0,5

Найти функцию $F(x)$ в виде линейной функции $y = ax + b$.

Решение.

Составим таблицу

i	x_i	x_i^2	y_i	$x_i y_i$
1	1	1	3	3
2	2	4	4	8
3	3	9	2,5	7,5
4	5	25	0,5	2,5
∑	11	39	10	21

Для составления системы предварительно вычисляем

$$M_x = \frac{1}{4} \cdot 11 = 2{,}75, \qquad M_y = \frac{1}{4} \cdot 10 = 2{,}5,$$

$$M_{xy} = \frac{1}{4} \cdot 21 = 5{,}25, \qquad M_{x^2} = \frac{1}{4} \cdot 39 = 9{,}75.$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} 9{,}75a + 2{,}75b = 5{,}25, \\ 2{,}75a + b = 2{,}5. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим a и b: $a \approx -0{,}74$, $b \approx 4{,}54$. Искомая прямая (рис. 7.2) есть

$$y = -0{,}74\,x + 4{,}54.$$

В случае нахождения приближающей функции в виде квадратного трехчлена имеем:

$$F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^2, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = x, \qquad \frac{\partial F}{\partial c} = 1.$$

Составим систему вида (1):

$$\sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\, x_i^2 = 0,$$

$$\sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c)\, x_i = 0,$$

$$\sum(y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0.$$

После несложных преобразований получается система трех линейных уравнений с неизвестными *a, b,* и *c*. Коэффициенты системы, так же как и в случае линейной функции, выражаются только через известные данные:

$$M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c = M_{x^2 y},$$

$$M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_x \cdot c = M_{xy},$$

$$M_{x^2} \cdot a + M_x \cdot b + c = M_y.$$

Здесь использованы обозначения (2), а также

$$M_{x^4} = \frac{1}{n}\sum x_i^4, \qquad M_{x^3} = \frac{1}{n}\sum x_i^3, \qquad M_{x^2 y} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 y_i,$$

Решение системы дает значения параметров *a, b,* и *c* для приближающей функции $F(x, a, b, c)$.

Пример 2. Методом наименьших квадратов подобрать для заданных значений *x* и *y* квадратичную функцию $F(x) = ax^2 + bx + c$:

x	7	8	9	10	11	12	13
y	7,4	8,4	9,1	9,4	9,5	9,5	9,4

Решение.

Составим таблицу

i	x_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	y_i	x_iy_i	$x_i^2y_i$
1	7	49	343	2401	7,4	51,8	362,6
2	8	64	512	4196	8,4	67,2	537,6
3	9	81	729	6561	9,1	81,9	737,1
4	10	100	1000	10000	9,4	94,0	940,0
5	11	121	1331.	14641	9,5	104,5	1149,5
6	12	144	1728	20736	9,5	114,0	1368,0
7	13	169	2197	28561	9,4	122,2	1588,6
$\sum$	70	728	7840	87096	62,7	635,6	6683,4

Отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 12442{,}29a + 1120b + 104c = 954{,}77, \\ 1120a + 104b + 10c = 90{,}8, \\ 104a + 10b + c = 8{,}96. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим a = -0,04, b = 1,10, c = 2,12. Таким образом, искомая квадратичная функция имеет вид $F(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}10x + 2{,}12$.

§3. Нахождение приближающей функции в виде других элементарных функций.

Покажем сейчас, как нахождение приближающей функции с двумя параметрами $F(x, a, b)$ в виде элементарной функции может быть сведено к нахождению параметров линейной функции.

1. Степенная функция (геометрическая регрессия)

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x, a, m) = ax^m.$$

Предполагая, что в исходной таблице данных значения аргумента и значения функции положительны прологарифмируем равенство при условии $a > 0$:

$$\ln F = \ln a + m \ln x.$$

Так как функция $F(x)$ является приближающей для функции $f(x)$, функция $\ln F$ будет приближающей для $\ln f$. Ведем новую переменную $u = \ln x$; тогда $\ln F$ будет функцией от u: $\Phi(u)$.

Обозначим

$$m = A, \quad \ln a = B.$$

Теперь равенство принимает вид:

$$\Phi(u, A, B) = Au + B,$$

т.е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

Практически для нахождения приближающей функции в виде степенной (при сделанных выше предположениях) необходимо сделать следующее:

1) по данной таблице составить новую таблицу, прологарифмировав значения x и y в исходной таблице;

2) по новой таблице найти параметры A и B приближающей функции $\Phi(u, A, B)$;

3) используя обозначения $m = A$, $\ln a = B$, найти значения параметров a и m и подставить их в выражение $F(x) = ax^m$.

Пример 3. Методом наименьших квадратов подобрать степенную функцию $F(x) = ax^m$ по следующим табличным данным:

x	1	2	3	4	5
y	7,1	27,8	62,1	110	161

Решение.

Составим таблицу

i	$u_i = \ln x_i$	u_i^2	$\ln y_i$	$u_i \ln y_i$
1	0,000	0,000	1,960	0,000
2	0,693	0,480	3,326	2,305
3	1,099	1,208	4,130	4,539
4	1,386	1,921	4,701	6,516
5	1,609	2,589	5,082	8,177
$\sum$	4,787	6,198	19,199	21,537

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1{,}240 \cdot A + 0{,}957 \cdot B = 4{,}307, \\ 0{,}957 \cdot A + B = 3{,}840. \end{cases}$$

Отсюда $A = 1{,}951$, $B = \ln a = 1{,}973$, т.е. $m = A = 1{,}951$ и $a = 7{,}132$. Следовательно, искомая функция имеет вид $y = 7{,}132 \cdot x^{1{,}951}$.

2. Показательная функция

Пусть исходная таблица такова, что приближающую функцию целесообразно искать в виде показательной функции:

$$F(x, a, m) = a \cdot e^{mx}, \quad a > 0.$$

Прологарифмируем равенство:

$$\ln F = \ln a + mx.$$

Приняв обозначения $m = A$, $\ln a = B$, перепишем равенство в виде: $\ln F = Ax + B$.

Таким образом, для нахождения приближающей функции в виде $F(x) = a \cdot e^{mx}$ нужно прологарифмировать значения

функции в исходной таблице и рассматривая их совместно с исходными значениями аргумента, построить для новой таблицы приближающую функцию вида $\ln F = Ax + B$. Вслед за этим в соответствии с обозначениями остается получить значения искомых параметров a и b и подставить их в формулу

$$F(x) = a \cdot e^{mx}.$$

Пример 4. Методом наименьших квадратов подобрать показательную функцию $y = a \cdot e^{mx}$ по следующим табличным данным:

x	0	2	4	6	8	10	12
y	1280	635	324	162	76	43	19

Решение.

Составим таблицу

i	x	x^2	$\ln y$	$x \ln y$
1	0	0	7,155	0
2	2	4	6,454	12,908
3	4	16	5,781	23,124
4	6	36	5,088	30,528
5	8	64	4,331	34,648
6	10	100	3,761	37,610
7	12	144	2,945	35,340
$\sum$	42	364	35,515	174,158

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 52A + 6B = 24{,}880, \\ 6A + B = 5{,}074, \end{cases}$$

т.е. $A = m = -0{,}348$, $B = \ln a = 7{,}162$. Следовательно, $m = -0{,}348$, $a = 1284$. Таким образом, искомая функция имеет вид $y = 1284 \cdot e^{-0{,}348x}$.

3. Дробно – линейная функция

Будем искать приближающую функцию в виде:

$$F(x,\ a,\ b) = \frac{1}{ax + b}.$$

Равенство перепишем следующим образом:

$$\frac{1}{F(x,a,b)} = ax + b.$$

Из последнего равенства следует, что для нахождения значений параметров a и b по заданной таблице нужно составить новую таблицу, у которой значения аргумента оставить прежними, а значения функции заменить обратными числами, после чего для получения таблицы найти приближающую функцию вида $ax + b$. Найденные значения параметров a и b подставить в формулу

$$F(x, f, b) = \frac{1}{ax + b}$$

4. Логарифмическая функция

Пусть приближающая функция имеет вид:

$$F(x,\ a,\ b) = a \cdot \ln x + b.$$

Легко видеть, что для перехода к линейной функции достаточно сделать подставку $\ln x = u$. Отсюда следует, что для нахождения значений a и b нужно прологарифмировать значения аргумента в исходной таблице и, рассматривая полученные значения в совокупности с исходными значениями функции, найти для полученной таким образом новой таблицы приближающую

функцию в виде линейной. Коэффициенты a и b найденной функции подставить в формулу

$$F(x, a, b) = a \cdot \ln x + b.$$

5. Гипербола

Если точечный график, построенный по таблице, дает ветвь гиперболы, приближающую функцию можно искать в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b.$$

Для перехода к линейной функции сделаем подстановку $u = 1/x$:

$$\Phi(u, a, b) = a \cdot u + b.$$

Практически перед нахождением приближающей функции вида $F(x, a, b)$ значения аргумента в исходной таблице следует заменить обратными числами и найти для новой таблицы приближающую функцию в виде линейной. Полученные значения параметров a и b подставить в формулу

$$F(x, a, b) = \frac{a}{x} + b.$$

6. Дробно – рациональная функция.

Пусть приближающая функция находится в виде:

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b}.$$

Имеем:

$$\frac{1}{F(x, a, b)} = a + \frac{b}{x},$$

так что задача сводится к случаю, рассмотренному в предыдущем пункте. Действительно, если в исходной таблице заменить значения x и y их обратными величинами по формулам $z = 1/x$ и $u = 1/y$ и искать для новой таблицы приближающую функцию вида $u = bz + a$, то найденные значения a и b будут искомыми для формулы

$$F(x, a, b) = \frac{x}{ax + b}.$$

Упражнения и задачи

В следующих задачах методом наименьших квадратов подобрать функции указанного вида по приведенным табличным данным.

Найти линейную функцию:

7.1.

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

7.2.

x	1	4	9	16	25
y	0,1	3	8,1	14,9	23,9

7.3.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y	3,02	2,81	2,57	2,39	2,18	1,99	1,81	1,85

Найти квадратичную функцию:

7.4.

x	7	8	9	10	11	12	13
y	3,1	4,9	5,3	5,8	6,1	6,4	5,9

7.5.

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

7.6.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-0,71	-0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

7.7. Найти степенную функцию $y = ax^m$:

x	1	2	3	4	5
y	7,1	15,2	48,1	96,3	150,1

7.8. Найти показательную функцию $y = ae^{mx}$:

x	2,2	2,7	3,5	4,1
y	67	60	53	50

7.9. Найти показательную функцию $y = ae^{mx}$:

x	1	3	5	7	9	11
y	0,75	1,81	5,34	10,86	24,52	59,00

7.10. В таблице приведена зависимость веса головного мозга y(г) от веса тела x(кг) у разных видов млекопитающих. Найти уравнение зависимости вида $y = ax^m$.

Виды млекопитающих	x	y	Виды млекопитающих	x	y
Домашняя кошка	3,3	31	Лев	119,5	219

Антилопа рациферос	8,6	50	Зебра	255,0	541
Леопард	27,7	164	Носорог	765,0	655
Антилопа эпицерос	37,9	148	Слон	3048,0	5430

7.11. Найти зависимость площади листа огурца в см^2 (y) от длины листа в см (x) вида $y = ax^m$:

x	8	10	12	14	16	18	20	22
y	68	111	153	224	297	369	460	514

7.12. В таблице приведены данные о зависимости завязывания семян ячменя от дозы облучения. Найти уравнение зависимости вида $y = ae^{mx}$, где x – доза облучения, y – количество завязывающихся семян в процентах.

x	0	6	9	12
y	96,7	81,8	83,9	84,9

7.13. Найти зависимость вида $y = ba^x$ веса самцов павианов-гамадрилов y (в кг) от возраста x (в месяцах).

x	20	26	32	38	42	48	52
y	4,6	4,5	6,4	6,1	7,5	8,0	11,0

Ответы.

7.1. $y = 3{,}023x - 1{,}08$.

7.2. $y = 0{,}992x - 0{,}909$.

7.3. $y = -1{,}802x + 2{,}958$.

7.4. $y = -0{,}145x^2 + 3{,}324x - 12{,}794$.

7.5. $y = 1{,}009x^2 - 4{,}043x + 5{,}045$.

7.6. $y = -0{,}102x^2 + 0{,}200x + 0{,}806$.

7.7. $y = 5{,}7x^{0{,}44x}$.

7.8. $y = 92e^{-0{,}15x}$.

7.9. $y = 0{,}49e^{0{,}44x}$

ГЛАВА 8
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Системы линейных алгебраических уравнений

Основная задача линейной алгебры – решение системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

которая может быть записана в матричном виде:

$$\boldsymbol{A \cdot X = B};$$

здесь

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

прямоугольная матрица размерности $m \times n$,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ **- вектор *n*-го порядка,**

а $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ **- вектор *m*-го порядка.**

Решением системы (1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, …, $x_n = c_n$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной (противоречивой), если она не имеет решений. Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если более одного решения.

Две системы линейных уравнений называются равносильными (эквивалентными), если каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот.

Матрица $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n}b_1 \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n}b_2 \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn}b_m \end{pmatrix}$**,**

полученная из матрицы A добавлением столбца свободных членов, называется расширенной.

Теорема Кронекера-Капелли.

Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы *A* был равен рангу расширенной матрицы $\overline{A}$.

При этом:

1) **если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;**
2) **если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.**

Если матрица *A* квадратная и ее определитель не равен нулю (det $A \neq 0$), то она называется неособенной (невырожденной). Система линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными, имеющая неособую матрицу *A*, совместна и имеет единственное решение.

Для неособенной матрицы важным является понятие обратной матрицы. Обратной по отношению к данной называется матрица A^{-1}, которая, будучи умноженной как справа, так и слева на указанную матрицу, дает единичную матрицу, т.е.

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Матрица A^{T}, полученная перестановкой в матрице A строк со столбцами, называется транспонированной матрицей

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{21}\ldots a_{m1} \\ a_{12}a_{22}\ldots a_{m2} \\ \ldots \\ a_{1n}a_{2n}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A называется симметричной, если она равна транспонированной ($A = A^{\mathrm{T}}$), т.е. если $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица называется ортогональной, если сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, а сумма произведений, соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю, т.е. $A^{\mathrm{T}} \cdot A = E$.

Характеристическим уравнением матрицы A называется уравнение $|A - \lambda E| = 0$, **т.е.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни λ_i характеристического уравнения называются собственными (характеристическими) числами матрицы. Собственным вектором матрицы A, отвечающим

собственному значению λ_i**, называется вектор** $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$**,**

который удовлетворяет матричному уравнению $Av = \lambda_i \cdot v.$

Совокупность собственных чисел называется спектром матрицы.

Пример 1.

Найти собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение матрицы

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

Отсюда $\lambda_1 = 7; \lambda_2 = -2.$

Таким образом, спектр матрицы *A* состоит из чисел: -2, 7.

В дальнейшем будем рассматривать численные методы решения систем линейных уравнений с квадратными матрицами.

Все методы решения систем линейных уравнений делятся на прямые и итерационные.

Прямые методы **дают решение системы за конечное число арифметических действий. Если все операции**

выполняются без ошибок округления, то решение системы получится точным. Так как на практике все вычисления ведутся с округлениями, то и значения неизвестных, полученные точным методом, неизбежно будут содержать погрешности. К точным методам относятся, например, метод Гаусса, метод Крамера и др.. Для численного решения системы метод Крамера непригоден, т.к. требует вычисления $n + 1$ определителя n-го порядка. Даже при выборе наилучшего метода вычисление одного определителя требует примерно столько же времени, что и решение системы линейных уравнений современными численными методами.

Итерационные методы **являются приближенными. Они дают решение системы как предел последовательных приближений, вычисляемых по единообразной схеме. Основное требование к методу решения – минимум числа арифметических действий, достаточных для отыскания приближенного решения с заданной точностью.**

§ 2. Частные случаи систем.

1. Несложно решить систему (1) в перечисленных ниже частных случаях. Пусть матрица A – диагональная**, т.е. $a_{ij} = 0$, $j \neq i, a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда система имеет вид**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1, \\ a_{22}x_2 = b_2, \\ \dots \\ a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

откуда находим $x_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, ***i* = 1, 2,…, *n*.**

2. Если *A* – нижняя треугольная матрица**, т.е. $a_{ij} = 0$ при $j > i$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $a_{ii} \neq 0$,**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то система уравнений (1) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Компоненты вектора *X* находятся последовательно при переходе от *m* к *m* + 1, начиная с *m* = 1:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \qquad x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1), \quad \dots,$$

$$x_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1m+1}}\left(b_{m+1} - \sum_{k=1}^{m} a_{m+1}x_k\right),$$

***m* = 2, 3, …,*n* – 1.**

Чтобы найти вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$,

требуется $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 = n^2$ **арифметических действий.**

3. Если A **– верхняя треугольная матрица, т.е.** $a_{ij} =$ **при** $j < i$, $a_{ii} = 0$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то система (1) имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ \qquad a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_{n-1}, \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Компоненты вектора X **определяются последовательно при переходе от** $m + 1$ **к** m **по формулам**

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \dots, x_m = \frac{1}{a_{mm}}(b_m - \sum_{k=m+1}^{n} a_{mk}x_k), \dots$$

$$m = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1,$$

что требует также n^2 **действий.**

4. Для многих задач A является разреженной матрицей**, большинство элементов которой – нули.**

Частным случаем разреженной матрицы является ленточная матрица**; все ее ненулевые элементы находятся вблизи главной диагонали, т.е. $a_{ij} = 0$ если $|i - j| > l$, где $l < n$. Отличные от нуля элементы расположены на $2l + 1$ диагоналях, включая главную диагональ. Примером является трехдиагональная матрица**

$$A = \begin{pmatrix} -c_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & b_n & -c_n \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система (1) имеет вид

$$\begin{cases} -c_1 x_1 + b_1 x_2 = d_1, \\ a_2 x_1 - c_2 x_2 + b_2 x_3 = d_2, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad b_n x_{n-1} - c_n x_n = d_n. \end{cases}$$

Для решения такой системы можно использовать следующий метод исключения, называемый методом прогонки**.**

Предположим, что имеет место соотношение

$$x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (2)$$

с неопределенными коэффициентами α_{i+1} и β_{i+1}.

Подставим

$$x_{i-1} = \alpha_i x_i + \beta_i$$

в *i* – е уравнение системы:

$(a_i\alpha_i - c_i)x_i + b_i x_{i+1} = d_i - a_i\beta_i$,

сравнивая это тождество с первоначальным соотношением, находим

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 2,...,n-1, \qquad (3)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i - d_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 2,...,n-1. \qquad (4)$$

Используем первое уравнение системы для определения α_2, β_2. Из нашего предположения при $i = 1$ находим $x_1 = \alpha_2 x_2 + \beta_2$ и $x_1 = \frac{b_1}{c_1}x_2 - \frac{d_1}{c_1}$.

Следовательно, $\alpha_2 = \frac{b_1}{c_1}$, $\beta_2 = -\frac{d_1}{c_1}$.

Зная, α_1 и β_2 и переходя от *i* к *i* + 1 в формулах (3) и (4), определим α_i и β_i для всех *i* = 2, 3, …, *n*. Вычисления по формуле (2) ведутся путем перехода от *i*+1 к *i* (т.е., зная x_{i+1}, находим x_i), и для начала этих вычислений надо задать x_n. Определим x_n из последнего уравнения системы и условия (2) при *i* = *n* - 1:

$$x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n.$$

Отсюда находим

$$x_n = \frac{d_n - b_n\beta_n}{b_n\alpha_n + b_n}.$$

Соберем все формулы прогонки и запишем их в порядке применения:

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 2,...,n-1, \qquad \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1};$$

$$\beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i - d_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad i = 2,...,n-1, \quad \beta_2 = -\frac{d_1}{c_1};$$

$$x_n = \frac{d_n - b_n\beta_n}{b_n\alpha_n + b_n};$$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, \qquad i = n-1, n-2,...,2,1.$$

§ 3. Метод Гаусса.

Имеется несколько вычислительных вариантов метода Гаусса, основанного на идее последовательного исключения. Процесс решения системы линейных уравнений *AX = B* по методу Гаусса состоит из двух этапов.

Первый этап (прямой ход). **Система (1) приводится к треугольному виду.**

Второй этап (обратный ход). **Неизвестные x_n, x_{n-1}, …, x_1 определяются по формулам (см. § 2, система с верхней треугольной матрицей).**

Перейдем к подробному изложению метода. Первый шаг **метода Гаусса состоит в исключении из всех уравнений, кроме первого, неизвестного x_1. Предположив, что** $a_{11} \neq 0$, **разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}. Выполнения**

условия $a_{11} \neq 0,$ **можно добиться всегда путем перестановки уравнений системы:**

$$x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \quad \alpha_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad \boldsymbol{j = 2, \ldots, n}, \quad \beta_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Пользуясь полученным уравнением, легко исключить неизвестное x_1 из остальных уравнений системы (для этого достаточно из каждого уравнения вычесть преобразованное первое уравнение, предварительно умноженное на соответствующий коэффициент при x_1) .

Вслед за этим, оставив первое уравнение в покое, над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с элементом $a_{i2} \neq 0$ **и исключим с его помощью из остальных уравнений неизвестное x_2 . Повторяя этот процесс, вместо системы (1) получим равносильную ей систему с верхней треугольной матрицей:**

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots \\ x_n = \beta_n. \end{cases} \qquad \textbf{(5)}$$

Из системы (5) последовательно находят значения всех неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$.

Число N арифметических операций, необходимых для реализации метода Гаусса, определяется следующей формулой

$$N = \frac{2n(n+1)(n+2)}{3} + n(n+1),$$

где n – число неизвестных.

Таким образом, время, необходимое для выполнения арифметических операций при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, примерно пропорционально кубу числа неизвестных.

Пример 2.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Решение.

<u>Прямой ход. Первый шаг.</u> Разделим первое уравнение на $a_{11} = 2$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение системы на -3 и сложим со вторым уравнением; затем умножим первое уравнение на -4 и сложим с третьим уравнением:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \\ -5x_2 - 6{,}5x_3 = -8, \\ 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Второй шаг. Разделим второе уравнение системы на -5:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \\ x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}6, \\ 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на -3 и сложим с третьим:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \\ x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}6, \\ -2{,}9x_3 = -5{,}8. \end{cases}$$

Третий шаг. Делим третье уравнение на –2,9:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 = 2, \\ x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}6, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Обратный ход. Из системы последовательно находим: $x_3 = 2$,

$x_2 = 1{,}6 - 1{,}3 \cdot x_3 = 1{,}6 - 1{,}3 \cdot 2 = -1$, $x_1 = 2 - 2x_2 - 1{,}5 \cdot x_3 = 1$.

Таким образом, решение системы найдено:

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

§ 4. Метод простой итерации.

Рассмотрим общее описание метода итераций **для системы линейных алгебраических уравнений $AX = B$.**

Для ее решения выбирается некоторое начальное приближение X_0 и последовательно находятся приближенные решения (итерации) системы. Значение итерации $X_{к+1}$ выражается через известные предыдущие итерации $X_к$, $X_{к-1}$,… . Если при вычислении $X_{к+1}$ используется только одна предыдущая итерация $X_к$, то итерационный метод называют одношаговым **(или** двухслойным**) методом; если же $X_{к+1}$ выражается через две итерации $x_к$ и $X_{к-1}$, то метод называется** двухшаговым **(или** трехслойным**). Мы будем рассматривать одношаговые методы.**

Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$, разрешим первое уравнение системы относительно x_1, второе – относительно x_2 и т.д. Получим систему

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1, \\ x_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2, \\ \ldots \\ x_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n. \end{cases}$$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & . & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \textbf{и} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

систему можно записать в матричной форме

$$X = \alpha X + \beta,$$

Выберем начальное приближение $X_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Дальнейшие приближения вычисляются по формулам

$$X_1 = \alpha X_0 + \beta,$$

...

$$X_{\kappa+1} = \alpha X_\kappa + \beta.$$

Пример 3.

Решить систему уравнений методом простой итерации

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение.

Перепишем систему:

$$\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 - x_3 - 1, \\ x_2 = 3x_1 - 3x_2 + x_3 - 2, \\ x_3 = x_1 - x_2 - 3. \end{cases}$$

В качестве начального приближения выберем $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Подставим X_0 **в правую часть системы и произведем вычисления. Получим координаты новой точки**

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Используя эти координаты, можно получить следующее приближение:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$ **и т.д.**

Оказывается, что при определенных условиях последовательность X_0, X_1, X_2, **… сходится и ее предел является решением системы. Условия сходимости связаны с понятием** нормы матрицы. **Пусть** A **– матрица размером** $m \times n$**.**

Нормой матрицы A **называется неотрицательное число** $\|A\|$**, обладающее следующими свойствами:**

а) $\|A\| \geq 0$, **причем** $\|A\| = 0$ **тогда и только тогда, когда все элементы матрицы** A **равны нулю;**

б) $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ **(**α **- число) и, в частности** $\|-A\| = \|A\|$;

в) $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$ **(неравенство треугольника);**

г) $\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$

Нормы матрицы можно ввести различными способами. Рассмотрим три из них, наиболее распространенные:

а) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le i\le m} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ **— первая норма,**

она равна максимальной из сумм модулей элементов матрицы $A_{m\times n}$ по строкам**;**

б) $\|A\|_2 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ **— вторая норма,**

она равна максимальной из сумм модулей элементов матрицы $A_{m\times n}$ по столбцам**;**

в) $\|A\|_3 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$ **— третья норма,**

она равна квадратному корню из суммы квадратов элементов матрицы.

Пример 4.

Вычислить все три нормы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$\|A\|_1 = \max(1+2+3,$ **4+5+6, 7+8+9) = max(6, 15, 24) = 24.**

$\|A\|_2 = \max$ **(1+4+7, 2+5+8, 3+6+9) = max(12, 15,18) = 18.**

$$\|A\|_3 = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2} = \sqrt{285} \approx 16{,}9.$$

Теорема 1. **Для сходимости процесса простой итерации при произвольном выборе начального приближения X_0 необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы α были по модулю меньше единицы.**

Теорема 2 **(достаточное условие сходимости). Если какая-нибудь норма $\|\alpha\|$ матрицы α удовлетворяет неравенству**

$\|\alpha\| < 1,$ **то процесс простой итерации сходится к единственному решению при любом начальном приближении.**

Оценка нормы разности к-ой итерации, выраженная через норму разности начальных итераций, задается следующей формулой

$$\|X - X_к\| \le \frac{\|\alpha\|^к}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|X_1 - X_0\|.$$

В частности, если выбрать $X_0 = \beta,$ **то** $X_1 = \alpha\beta + \beta,$

$$\|X_1 - X_0\| = \|\alpha \cdot \beta\| \le \|\alpha\| \cdot \|\beta\|.$$

Следовательно, $$\|X - X_k\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\beta\|.$$

Пример 5. **Показать, что для системы**

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15 \end{cases}$$

процесс итерации сходится. Сколько итераций следует выполнить, чтобы найти решение системы с точностью до 10^{-4}?

Решение.

Приводя систему к виду, удобному для итерации, получим:

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4, \\ x_2 = -0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 - 0{,}2x_4 + 0{,}5, \\ x_3 = -0{,}1x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}05x_4 - 0{,}5, \\ x_4 = -0{,}15x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}75 \end{cases}$$

или в компактной форме

$$X = \alpha X + \beta,$$

где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}1 & -0{,}2 & 0{,}3 \\ -0{,}1 & 0 & 0{,}1 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & -0{,}15 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}15 & -0{,}1 & -0{,}05 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Используя, например, норму $\| \alpha \|_2$, получим:

$$\| \alpha \|_2 = \max(0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}55) = 0{,}55 < 1.$$

Следовательно, процесс итерации для данной системы сходится.

За начальное приближение примем

$$X_0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\| \boldsymbol{\beta} \|_2 = 0 + 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75 = 1{,}75.$$

Пусть k – число итераций, необходимое для достижения заданной точности. Будем иметь:

$$\|X - X_k\| \le \frac{\|\alpha\|_2^{k+1}}{1 - \|\alpha\|_2} \cdot \|\beta\|_2 = \frac{0{,}55^{k+1}}{1 - 0{,}55} \cdot 1{,}75 < 10^{-4}.$$

Отсюда

$$0{,}55^{k+1} < \frac{45}{175} \cdot 10^{-4}$$

$$(k + 1) \lg 0{,}55 < \lg 45 - \lg 175 - 4,$$

т.е.

$$-(k + 1)0{,}25964 < 1{,}6532 - 2{,}24304 - 4 = -4{,}58983.$$

Следовательно,

$$k + 1 > \frac{4{,}58983}{0{,}225964} \approx 17{,}7 \qquad \text{и} \qquad k > 16{,}7.$$

Можно принять $k = 17$.

§ 5. Метод Зейделя.

Будем рассматривать исходную систему линейных уравнений и эквивалентную ей приведенную систему. В отличие от метода простой итерации в методе Зейделя вычисления проводятся по схеме

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \alpha_{11}x_1^{(k)} + \alpha_{12}x_2^{(k)} + \alpha_{13}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{1n}x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = \alpha_{21}x_1^{(k)} + \alpha_{22}x_2^{(k)} + \alpha_{23}x_3^{(k)} + \ldots + \alpha_{2n}x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \ldots \\ x_i^{(k+1)} = \alpha_{i1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{i2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{ii-1}x_{i-1}^{(k+1)} + \alpha_{ii}x_i^{(k)} + \ldots + \alpha_{in}x_n^{(k)} + \beta_i, \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = \alpha_{n1}x_1^{(k+1)} + \alpha_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + \alpha_{nn}x_n^{(k)} + \beta_{ni}. \end{cases}$$

Иначе говоря, только что полученный компонент новой итерации используется для расчета последующих компонентов этой же итерации.

Выполнение достаточных условий сходимости метода простой итерации (см. §4, теорема 2) обеспечивает и сходимость процесса Зейделя.

Пример 6. **Методом Зейделя решить систему уравнений**

$$\begin{cases} 20{,}9x_1 + 1{,}2x_2 + 2{,}1x_3 + 0{,}9x_4 = 21{,}70; \\ 1{,}2x_1 + 21{,}2x_2 + 1{,}5x_3 + 2{,}5x_4 = 27{,}46; \\ 2{,}1x_1 + 1{,}5x_2 + 19{,}8x_3 + 1{,}3x_4 = 28{,}76; \\ 0{,}9x_1 + 2{,}5x_2 + 1{,}3x_3 + 32{,}1x_4 = 49{,}72. \end{cases}$$

Решение.

Приведем систему к виду, удобному для итерации

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{20{,}9}\left(21{,}70 - 1{,}2x_2 - 2{,}1x_3 - 0{,}9x_4\right), \\ x_2 = \dfrac{1}{21{,}2}\left(27{,}46 - 1{,}2x_1 - 1{,}5x_3 - 2{,}5x_4\right), \\ x_3 = \dfrac{1}{19{,}8}\left(28{,}76 - 2{,}1x_1 - 1{,}5x_3 - 1{,}3x_4\right), \\ x_4 = \dfrac{1}{32{,}1}\left(49{,}72 - 0{,}9x_1 - 2{,}5x_2 - 1{,}3x_3\right). \end{cases}$$

Имеем $\| \alpha \|_1 = \max \left(\frac{4,2}{20,9}; \frac{5,2}{21,2}; \frac{4,9}{19,8}; \frac{4,7}{32,1} \right) =$

= $\max (0,20;\ 0,24;\ 0,25;\ 0,15) = 0,25,$ **т.е.** $\| \alpha \|_1 < 1.$

Следовательно, сходимость итераций гарантирована, так как выполнение достаточных условий сходимости простых итераций обеспечивает и сходимость процесса Зейделя.

В качестве начального приближения возьмем элементы столбца свободных членов, округлив их значения до двух знаков после запятой

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1,04 \\ 1,30 \\ 1,45 \\ 1,55 \end{pmatrix}.$$

Будем решать методом Зейделя. При $\kappa = 1$**:**

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{20,9}(21,70 - 1,560 - 3,045 - 1,395) = 0,7512.$$

При вычислении $x_2^{(1)}$ **используем уже полученное значение** $x_1^{(1)}$**:**

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{21,2}(27,46 - 0,900 - 2,175 - 3,875) = 0,9674.$$

При вычислении $x_3^{(1)}$ **используем значения** $x_1^{(1)}$ **и** $x_2^{(1)}$**:**

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{19,8}(28,76 - 1,575 - 1,455 - 2,015) = 1,1977.$$

Наконец, используя значения $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}$**, получаем**

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{32,1}(49,72 - 0,675 - 2,425 - 1,560) = 1,4037.$$

Аналогичным образом ведем вычисления при $к = 2$ и $к = 3$. Получаем при $к = 2$:

$$x_1^{(2)} = \frac{16,76062}{20,9} = 0,8019; \qquad x_3^{(2)} = \frac{23,75180}{19,8} = 1,9996;$$

$$x_2^{(2)} = \frac{21,19202}{21,2} = 0,9996; \qquad x_4^{(2)} = \frac{44,93981}{32,1} = 1,4000;$$

при $k = 3$:

$$x_1^{(3)} = \frac{16,72132}{20,9} 0,80006; \qquad x_3^{(3)} = \frac{23,759844}{19,8} = 1,19999;$$

$$x_2^{(3)} = \frac{21,200528}{21,2} = 1,00002; \qquad x_4^{(3)} = \frac{44,939909}{32,1} = 1,40000.$$

§ 6. Понятие об обусловленности системы.

Известно, что если $\det A \neq 0$, **то система**

$$AX = B$$

имеет решение $X = A^{-1} \cdot B$.

Если же $\det A = 0$, **то матрица A не имеет обратной, и система или не имеет решений, или имеет их бесконечно много. Такие системы называют** сингулярными **или** необусловленными**. Так как обычно коэффициенты системы известны приближенно, то значение определителя может оказаться отличным от нуля, хотя точное его значение (при точных коэффициентах) должно было ему равняться.**

Таким образом, у «хорошей» системы определитель должен быть не просто отличен от нуля, но и не близок к нему. В связи с

этим возникает понятие хорошо **или** плохо **обусловленной системы.**

Рассмотрим для иллюстрации простейший пример.

Пример 7.

Пусть имеем систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ x_1 + 2{,}005x_2 = -1. \end{cases}$$

Определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2{,}005 \end{vmatrix} = 0{,}005,$$

т.е. близок к нулю.

Решением системы является:

$x_1 = 801, \qquad x_2 = -400.$

Предположим, что за счет погрешности коэффициент при x_2 во втором уравнении изменится на 0,01 и станет равным 1,995. Тогда решением системы будет $x_1 = -799$; $x_2 = 400$ (не минус, а плюс!). Таким образом, изменение одного из коэффициентов всего на 0,5% изменило решение на 200%. Системы такого рода называют плохо обусловленными**.**

Пусть при неизменной матрице A вектор B получает приращение ΔB. Обозначая через ΔX приращение решения X, получим

$$A(X + \Delta X) = B + \Delta B,$$

откуда $A\Delta X = \Delta B$

и $\Delta X = A^{-1} \cdot \Delta B.$

Так как

$$|| \Delta X || = ||A^{-1} \cdot \Delta B|| \le ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta B||,$$

то при переходе от возмущения правой части к возмущению решения мы можем приобрести множитель $|| A^{-1}||$. Заметим теперь, что гораздо больше смысла имеет говорить не об абсолютных возмущениях ΔB и ΔX, а относительных возмущениях:

$$\delta B = \frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}, \qquad \delta X = \frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}.$$

В условиях нашей задачи мы легко можем получить оценку δX через δB. Для этого заметим, что из $AX = B$ следует

$$|| B || \le || A || \cdot || X ||$$

и

$$\|X\| \ge \frac{\|B\|}{\|A\|}.$$

Зная, что

$$|| \Delta \mathbf{X} || \le || \mathbf{A}^{-1}|| \cdot ||\Delta \mathbf{B}||,$$

мы можем получить

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \le \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta B\|}{\|B\|},$$

т.е.

$$\delta X \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \delta B = \kappa \cdot \delta B,$$

где

$$\kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

называется числом обусловленности **матрицы** A**. Оно имеет смысл коэффициента наихудшего возможного увеличения относительной ошибки при переходе от возмущения правой части (а так же и возмущения матрицы системы** A**) к возмущению решения.**

Из тождества $A \cdot A^{-1} = E$ **следует**

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1,$$

т.е. число обусловленности κ **матрицы не может быть меньше 1.**

Матрицы с близкими к 1 значениями числа обусловленности κ **называют** хорошо обусловленными **матрицами (или системами). Если число обусловленности** κ **велико, то матрицу называют** плохо обусловленной**.**

Заметим, что обусловленность матрицы A **не изменится, если ее умножить на произвольное ненулевое число. Это означает, что обусловленность линейной системы нельзя улучшить умножением всех ее коэффициентов на одно и то же число.**

Можно показать, что в общем случае, когда возмущения получают и правая часть B **и матрица** A **системы, относительное возмущение решения** δX **выражается неравенством**

$$\delta X \le \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\|} (\delta A + \delta B).$$

Если $\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta A\| << 1$**, то знаменатель неравенства можно считать равным 1, и мы видим, опять-таки, что число обусловленности** $\kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ **снова выступает в роли коэффициента усиления относительной ошибки при переходе от возмущенной матрицы и правой части к возмущению решения.**

Вернемся к примеру 7. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2{,}005 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2{,}005 \end{vmatrix} = 0{,}005.$$

Далее:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 401 & -400 \\ -200 & 200 \end{pmatrix},$$

$$\|A\|_1 = 3{,}005; \quad \|A^{-1}\|_1 = 801; \quad \kappa = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \approx 2400.$$

Система плохо обусловлена, в чем мы уже имели возможность убедиться.

Геометрический смысл в данном случае заключается в том, что прямые, определяемые уравнениями, параллельны. По этой причине точка пересечения прямых, координаты которой образуют решение системы, определяется с большой ошибкой. Плохо обусловленные системы очень чувствительны к ошибкам округления, допущенным в процессе их решения.

Упражнения и задачи.

Методом Гаусса найти решения систем:

8.1. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases}$

8.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$

8.3. $\begin{cases} 3{,}2x_1 + 5{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 2{,}2x_4 = 2{,}6, \\ 2{,}1x_1 + 3{,}2x_2 + 3{,}1x_3 + 1{,}1x_4 = 4{,}8, \\ 1{,}2x_1 + 0{,}4x_2 - 0{,}8x_3 - 0{,}8x_4 = 3{,}6, \\ 4{,}7x_1 + 10{,}4x_2 + 9{,}7x_3 + 9{,}7x_4 = -8{,}4. \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} 6{,}087x_1 - 3{,}913x_2 + 7{,}547x_3 + 1{,}734x_4 = 3{,}21, \\ 1{,}739x_1 + 0{,}869x_2 + 1{,}887x_3 + 0{,}73x_4 = 6{,}35, \\ 2{,}174x_1 - 1{,}305x_2 + 2{,}83x_3 + 1{,}04x_4 = 1{,}5, \\ 4{,}5x_1 - 1{,}305x_2 + 1{,}887x_3 + 0{,}541x_4 = -1{,}27. \end{cases}$

8.5. $\begin{cases} 2{,}67x_1 + 5{,}1x_2 + 3{,}31x_3 + 5{,}64x_4 + 4{,}76x_5 = 6{,}19, \\ 4{,}44x_1 + 7{,}5x_2 + 4{,}67x_3 + 5{,}7x_4 + 6{,}14x_5 = 6{,}95, \\ 5{,}33x_1 + 9{,}8x_2 + 8{,}67x_3 + 4{,}8x_4 + 7{,}33x_5 = 12{,}2, \\ 3{,}56x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}15x_3 + 3{,}69x_4 + 3{,}25x_5 = 5{,}97, \\ 1{,}78x_1 + 4{,}17x_2 + 2{,}67x_3 + 4{,}69x_4 + 3{,}75x_5 = 4{,}42. \end{cases}$

Решить системы уравнений с точностью до 0,001 : а) методом простой итерации, б) методом Зейделя:

8.6. $\begin{cases} 5x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 = 10, \\ 0{,}08x_1 + 4x_2 - 0{,}15x_3 = 20, \\ 0{,}18x_1 - 0{,}06x_2 + 3x_3 = -4{,}5. \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} 4{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 21{,}14, \\ 0{,}3x_1 + 5{,}3x_2 + 0{,}9x_3 - 0{,}1x_4 = -17{,}82, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 3{,}2x_3 + 0{,}2x_4 = 9{,}02, \\ 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 - 9{,}1x_4 = 17{,}08. \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 - 1{,}1x_4 + 5{,}8x_5 = 23{,}84, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + 1{,}1x_3 + 10{,}2x_4 + x_5 = 38{,}85, \\ 0{,}5x_1 - 6{,}2x_2 + 0{,}1x_3 + 1{,}5x_4 - 1{,}2x_5 = 17{,}23, \\ 0{,}1x_1 + 2{,}1x_2 + 5{,}1x_3 + 0{,}2x_4 - 0{,}3x_5 = 6{,}56, \\ 2{,}5x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}3x_4 + 0{,}4x_5 = 6{,}63. \end{cases}$

Ответы.

8.1. (-1; 3; -2; 2).

8.2. (0; 2; $\frac{1}{3}$; $-\frac{3}{2}$).

8.3. (5; -4; 3; 2).

8.4. (-0,46; 2,76; 1,802; 1,85).

8.5. (1,12; -2,4; 2,25; 0,53; 1,05).

8.6. (1,909; 4,916; -1,516).

8.7. (5,2; -4,2; 3; -1,8).

8.8. (1,5; -2,7; 2,5; 3,1; 4,3).

ЗАДАЧИ

Задача 1.

Вычислить одним из указанных методов с точностью до 0,001 действительные корни уравнений: а) методом хорд, б) методом касательных, в) комбинированным методом.

1. $x^3 - 6x + 2 = 0, \quad x > 2.$

2. $x^4 - x - 1 = 0, \quad x > 1.$

3. $x^3 + 2x - 8 = 0.$

4. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0, \quad x > 0.$

5. $x^3 - 6x + 2 = 0, \quad x < 0.$

6. $x^3 - 5x + 1 = 0, \quad x.$

7. $(x+1)^3 - x = 0.$

8. $x^4 - 4x + 1 = 0, \quad x > 1.$

9. $x^3 + x + 1 = 0.$

10. $x^3 + 2x - 30 = 0.$

11. $2x^3 - 5x^2 + 7x - 2 = 0.$

12. $x^4 - 2x - 2 = 0, \quad x > 1.$

13. $x^5 + x + 1 = 0.$

14. $x^5 - x - 2 = 0.$

15. $x^3 - 12x - 5 = 0.$

16. $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0.$

17. $3x^5 + 6x - 16 = 0.$

18. $x^3 + x^2 - 4 = 0.$

19. $2x^3 + 2x - 7 = 0.$

20. $x^4 - 8x + 1 = 0$, $x > 1$.

21. $x^3 + x^2 - 3 = 0$.

22. $x^3 - 3x + 1 = 0, \quad x > 1$.

23. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.

24. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x > 1$.

25. $x^3 + 3x - 0{,}5 = 0$.

26. $x^3 - 4x + 2 = 0, \quad x > 1$.

27. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0, \quad x > 1$.

28. $x^3 - 4x + 2 = 0, \quad x < -2$.

29. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0, \quad x < 0{,}5$.

30. $x^4 - 3x^2 + 4x - 1 = 0, \quad x < -2$.

31. $x^3 - 5x + 1 = 0, \quad x < -2$.

Задача 2.

Используя итерационный метод, найти один из корней уравнения с точностью до 0,001.

1. $(0{,}2x)^3 = \cos x$.

2. $x - 10\sin x = 0$.

3. $2^{-x} = \sin x, \quad x < 10$.

4. $2^x - 2\cos x = 0, \quad x > -10$

5. $\lg(x + 5) = \cos x, \quad x < 5$.

6. $\sqrt{4x + 7} = 3\cos x$.

7. $x\sin x - 1 = 0$.

8. $8\cos x - x = 6$.

9. $\sin x - 0{,}2x = 0$.

10. $10\cos x - 0{,}1x^2 = 0.$

11. $2\lg(x+7) - 5\sin x = 0.$

12. $4\cos x + 0{,}3x = 0.$

13. $5\sin 2x = \sqrt{1-x}.$

14. $1{,}2x^4 + 2x^3 - 24{,}1 = 13x^2 + 14{,}2x.$

15. $2x^2 - 5 = 2^x.$

16. $2^{-x} = 10 - 0{,}5x^2.$

17. $4x^4 - 6{,}2 = \cos 0{,}6x.$

18. $3\sin 8x = 0{,}7x - 0{,}9,$ на отрезке $[-1;1]$.

19. $1{,}2 - \ln x = 4\cos 2x.$

20. $\ln(x+6{,}1) = 2\sin(x-1{,}4).$

21. $2 - \lg x - x = 0.$

22. $4x - 7\sin x = 0.$

23. $x\ln x - 14 = 0.$

24. $x^x + 2x - 6 = 0.$

25. $e^x + e^{-3x} - 4 = 0.$

26. $2^x = 4x.$

27. $\lg x = \dfrac{1}{x}.$

28. $x^2 arctgx = 1.$

29. $\ln x = arctgx.$

30. $x^2 + \ln x - 4 = 0.$

31. $x = arctg\sqrt[3]{x}.$

Задача 3.

По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа. Построить его график и отметить на нем узловые точки $M_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2$. С помощью интерполяционного многочлена Лагранжа вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента и оценить погрешность интерполяции.

1.

x	***-1***	***0***	***3***
y	***-3***	***5***	***2***

$x = 2$.

2.

x	***2***	***3***	***5***
y	***4***	***1***	***7***

$x = 4$.

3.

x	***0***	***2***	***3***
y	-1	- 4	2

$x = 1$.

4.

x	7	9	13
y	2	-2	3

$x = 8$.

5.

x	***-3***	***-1***	***3***
y	7	- 1	4

$x = 2$.

6.

x	1	2	4
y	-3	-7	2

$x = 3$.

7.

8.

x	***-2***	***-1***	***2***
y	4	9	1

$x = 1$.

x	2	4	5
y	9	-3	6

$x = 3$.

9.

x	***-4***	***-2***	***0***
y	2	8	5

$x = -3$.

10.

x	-1	1,5	3
y	4	-7	1

$x = 2$.

11.

x	***2***	***4***	***7***
y	***-1***	***-6***	***3***

$x = 3$.

12.

x	***-9***	***-7***	***-4***
y	***3***	***-3***	***4***

$x = -5$.

13.

x	***0***	***1***	***4***
y	7	- 1	8

$x = 2$.

1 4.

x	-8	-5	0
y	9	-2	4

$x = -1$.

15.

x	***-7***	***-5***	***-4***
y	4	- 4	5

$x = -6$.

16.

x	1	4	9
y	-2	9	3

$x = 2$.

17.

18.

x	***7***	***8***	***10***
y	6	- 2	7

$x = 9$.

x	-4	0	2
y	4	8	-2

$x = 1$.

19.

x	***-3***	***-1***	***1***
y	11	- 1	6

$x = -2$.

20.

x	0	3	8
y	1	5	-4

$x = 2$.

21.

x	***1***	***3***	***4***
y	***-4***	***5***	***1***

$x = 2$.

22.

x	***-3***	***-1***	***2***
y	***-2***	***7***	***4***

$x = -2$.

23.

x	***-1***	***0***	***3***
y	2	5	8

$x = 1$.

24.

x	-3	-2	0
y	2	-1	-3

$x = -1$.

25.

x	***-2***	***-1***	***3***
y	9	- 8	5

$x = 1$.

26.

x	1	2	5
y	7	-1	6

$x = 3$.

27.

28.

x	-2	-1	3
y	6	-7	-2

$x = 2$.

x	-5	-3	2
y	2	3	- 1

$x = 8$.

29.

x	-3	-1	4
y	-2	4	-2

$x = -2$.

30.

x	3	5	6
y	-1	3	7

$x = 4$.

31.

x	1	2	4
y	-3	5	8

$x = 3$.

Задача 4.

Дана пятизначная таблица $f(x)$ на отрезке с шагом $h = 0{,}05$. Требуется уплотнить эту таблицу с шагом H на отрезке $[a, b]$. Вычислить значение производной функции, заданной таблично, используя интерполяционные формулы Лагранжа или Ньютона. Вычислить одно значение производной функции $f(x)$.

Варианты **1 – 8.**

x	$f(x) = \sin x$
0,60	0,56464
0,65	0,60519
0,70	0,64422
0,75	0,68164
0,80	0,71736
0,85	0,75128
0,90	0,78333

0,95	0,81342
1,00	0,84147
1,05	0,86742
1,10	0,89121

1. $a = 0{,}65$, $b = 0{,}75$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}72$.
2. $a = 0{,}70$, $b = 0{,}90$, $H = 0{,}02$, $x = 0{,}79$.
3. $a = 0{,}60$, $b = 0{,}70$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}63$.
4. $a = 0{,}60$, $b = 0{,}85$, $H = 0{,}025$, $x = 0{,}71$.
5. $a = 0{,}90$, $b = 1{,}00$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}98$.
6. $a = 0{,}85$, $b = 1{,}05$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}04$.
7. $a = 0{,}75$, $b = 0{,}85$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}76$.
8. $a = 0{,}75$, $b = 0{,}95$, $H = 0{,}02$, $x = 0{,}93$.

Варианты **9 – 16**.

x	$f(x) = \cos x$
0,05	0,99375
0,10	0,99500
0,15	0,99877
0,20	0,98007
0,25	0,96891
0,30	0,95534
0,35	0,93937
0,40	0,92106
0,45	0,90045
0,50	0,87758
0,55	0,85252

9. $a = 0{,}20$, $b = 0{,}45$, $H = 0{,}025$, $x = 0{,}21$.
10. $a = 0{,}10$, $b = 0{,}20$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}12$.
11. $a = 0{,}10$, $b = 0{,}35$, $H = 0{,}025$, $x = 0{,}13$.
12. $a = 0{,}20$, $b = 0{,}40$, $H = 0{,}02$, $x = 0{,}31$.
13. $a = 0{,}35$, $b = 0{,}45$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}37$.
14. $a = 0{,}25$, $b = 0{,}45$, $H = 0{,}02$, $x = 0{,}43$.

15. $a = 0{,}40$, $b = 0{,}50$, $H = 0{,}01$, $x = 0{,}48$.

16. $a = 0{,}30$, $b = 0{,}50$, $H = 0{,}02$, $x = 0{,}33$.

Варианты **17 – 24**.

x	$f(x) = \sin x$
1,10	0,89121
1,15	0,91276
1,20	0,93204
1,25	0,94898
1,30	0,96356
1,35	0,97572
1,40	0,98545
1,45	0,99271
1,50	0,99749
1,55	0,99973
1,60	0,99957

17. $a = 1{,}45$, $b = 1{,}55$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}46$.
18. $a = 1{,}10$, $b = 1{,}30$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}15$.
19. $a = 1{,}25$, $b = 1{,}50$, $H = 0{,}025$, $x = 1{,}27$.
20. $a = 1{,}15$, $b = 1{,}25$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}23$.
21. $a = 1{,}20$, $b = 1{,}40$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}31$.
22. $a = 1{,}40$, $b = 1{,}50$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}48$.
23. $a = 1{,}35$, $b = 1{,}55$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}53$.
24. $a = 1{,}30$, $b = 1{,}40$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}37$.

Варианты **25 – 31**.

x	$f(x) = \cos x$
1,00	0,54090
1,05	0,49757
1,10	0,45360
1,15	0,40849
1,20	0,36236
1,25	0,31532
1,30	0,26750
1,35	0,21901
1,40	0,16997
1,45	0,12050,
1,50	0,07074

25. $a = 1{,}20$, $b = 1{,}40$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}37$.
26. $a = 1{,}00$, $b = 1{,}25$, $H = 0{,}025$, $x = 1{,}21$.
27. $a = 1{,}00$, $b = 1{,}10$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}04$.
28. $a = 1{,}15$, $b = 1{,}25$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}18$.
29. $a = 1{,}25$, $b = 1{,}45$, $H = 0{,}02$, $x = 1{,}35$.
30. $a = 1{,}30$, $b = 1{,}40$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}32$.
31. $a = 1{,}40$, $b = 1{,}50$, $H = 0{,}01$, $x = 1{,}44$.

Задача 5.

Вычислить интеграл по формуле Ньютона – Лейбница, а затем приближенно по формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей. В каждом случае оценить погрешность и сравнить с точным значением интеграла.

1. $\int_{-4}^{-1} \ln(3x+13)dx$;
2. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$;
3. $\int_{1}^{4} \ln(3x-2)dx$;
4. $\int_{0}^{2} \ln(x^2+4)dx$;
5. $\int_{-1}^{2} \ln(x+2)dx$;
6. $\int_{2}^{11} \frac{xdx}{x^2-1}$;
7. $\int_{1}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$;
8. $\int_{0}^{3} \frac{xdx}{x^4+9}$;
9. $\int_{0}^{2} \frac{xdx}{x^4+9}$;
10. $\int_{0}^{1} (16x-1)e^{4x}dx$;
11. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x} \ln x dx$;
12. $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$;
13. $\int_{0}^{1} x\sqrt{x-x^2}dx$;
14. $\int_{1}^{3} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$;

15. $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)}$;

16. $\int_1^3 \frac{dx}{(9+x)\sqrt{x}}$;

17. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{3x^3+1}}$;

18. $\int_{-1}^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+5}}$;

19. $\int_3^5 \frac{2x-1}{x^2-x-5}dx$;

20. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$;

21. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

22. $\int_0^4 \frac{xdx}{\sqrt{x^2+9}}$;

23. $\int_0^9 \frac{\sqrt[4]{x}dx}{\sqrt{x}+x}$;

24. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+1}}$;

25. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$;

26. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{4-x}}$;

27. $\int_{-3}^1 \ln(2x+7)dx$;

28. $\int_0^5 xe^{2x}dx$;

29. $\int_{0,1}^{1,1} (x-0,1)\sqrt{5x+3,5}dx$;

30. $\int_1^3 x^2 \ln x dx$;

31. $\int_{-0,5}^{0,5} (x+0,5)\sqrt{5x+6,5}dx$.

Задача 6.

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ на отрезке $[a,b]$ при заданном начальном условии $y(a) = c$ и шаге интегрирования h:

а) методом Эйлера с шагом $2h$ и шагом h;

б) методом Рунге-Кутта с шагом $2h$ и шагом h;

в) методом Милна с шагом $2h$.

По полученным таблицам функции построить график и сравнить его с точным решением.

1. $y' = y - x^2$, $y(1) = 2$, $[1; 3]$, $h = 0{,}2$.
2. $yy' = -2x$, $y(0) = 5$, $[0; 1]$, $h = 0{,}1$.
3. $y' = 2 + y^2$, $y(1) = 2$, $[1; 2]$, $h = 0{,}1$.
4. $yy' + x = 0$, $y(-2) = -3$, $[-2; -1]$, $h = 0{,}1$.
5. $y' = (y - 1)x$, $y(1) = \frac{3}{2}$, $[1; 1{,}5]$, $h = 0{,}05$.
6. $yy' + x = 0$, $y(-2) = -3$, $[-2; 0]$, $h = 0{,}2$.
7. $y' = 3 + y^2$, $y(1) = 2$, $[1; 5]$, $h = 0{,}4$.
8. $xy' = 2y$, $y(2) = 3$, $[2; 3]$, $h = 0{,}1$.
9. $y'(x^2 + 2) = y$ $y(2) = 2$, $[2; 4]$, $h = 0{,}2$.
10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ $y(2) = 1$, $[2; 2{,}5]$, $h = 0{,}05$.
11. $y' = y - x$, $y(\frac{9}{2}) = 1$, $[4{,}5; 5]$, $h = 0{,}05$.
12. $y' = x^2 - y$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $[1; 3]$, $h = 0{,}2$.
13. $y' = xy$, $y(0) = -1$, $[0; 2]$, $h = 0{,}2$.
14. $y' = xy$, $y(0) = 1$, $[0; 0{,}5]$, $h = 0{,}05$.
15. $yy' = -\frac{x}{2}$, $y(4) = 2$, $[4; 5]$, $h = 0{,}1$.

16. $2(y + y') = x + 3$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $[1; 2]$, $h = 0{,}1$.

17. $y' = x + 2y$, $y(3) = 0$, $[3; 4]$, $h = 0{,}1$.

18. $x\,y' = 2y$, $y(1) = 3$, $[1; 3]$, $h = 0{,}2$.

19. $3y\,y' = x$, $y(-3) = -2$, $[-3; -1]$, $h = 0{,}2$.

20. $y' = y - x^2$, $y(-3) = 4$, $[-3; -2]$, $h = 0{,}1$.

21. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ $y(-2) = 1$, $[-2; -1]$, $h = 0{,}1$.

22. $y' = x^2 - y$, $y(2) = \frac{3}{2}$, $[2; 3]$, $h = 0{,}1$.

23. $y' = y - x$, $y(2) = 1$, $[2; 4]$, $h = 0{,}2$.

24. $yy' = -x$, $y(2) = 3$, $[2; 6]$, $h = 0{,}4$.

25. $y' = y - x$, $y(4) = 2$, $[4; 5]$, $h = 0{,}1$.

26. $3y\,y' = x$, $y(1) = 1$, $[1; 3]$, $h = 0{,}2$.

27. $y' = x^2 - y$, $y(0) = 1$, $[0; 2]$, $h = 0{,}2$.

28. $y' = 3y^{2/3}$, $y(1) = 3$, $[1; 3]$, $h = 0{,}2$.

29. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$ $y(-2) = -1$, $[-2; 0]$, $h = 0{,}2$.

30. $y' = x(y - 1)$, $y(1) = \frac{1}{2}$, [1; 5], $h = 0{,}4$.

31. $y' = x + 2y$, $y(1) = 2$, [1; 1,5] $h = 0{,}05$.

Задача 7

Методом наименьших квадратов подобрать линейную функцию вида $y = ax + b$ по табличным данным.

1.

x	3	4	5	6	7	8	9	10
y	33	38	43	48	54	60	65	70

x – возраст моллюска (в годах), y – длина раковины (в мм).

2.

x	66	44	77	63	73	64	74	65
y	199	200	210	212	218	218	223	225

x – высота сои, y – вес 1000 семян.

3.

x	33	40	48	50	54	60	66	142
y	12	11	18	16	21	22	18	13

x – высота нивяника обыкновенного , y – количество стебельных листьев.

4.

x	66	44	77	63	62	73	64	74
y	16	17	15	20	19	12	23	27

x – высота сои, y – урожайность.

5.

x	15	16	12	26	18	14	8	38
y	52	46	38	37	37	37	25	25

x – урожай плодов (в сотнях), y – процент поврежденных плодов.

6.

x	13	14	15	16	17	18	19	20
y	27	30	25	35	50	43	66	65

x – среднемесячная температура за сентябрь, y – развитие бурой ржавчины пшеницы (в процентах).

7.

x	38	41	44	47	60	66	72	87
y	47	47	49	52	50	62	53	61

x – длина максимального стебельного листа нивяника, y – высота растения.

8.

x	110	107	101	120	100	99	95	90
y	64	56	50	78	50	43	42	40

x – масса самки клопа-черепашки (в мг), y– плодовитость (в шт/самку).

9.

x	0	50	100	150	170	200	250	300
y	0	8	14	20	24	26	32	38

x – доза облучения листьев табака, y – частота соматических мутаций.

10.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0,7	1,0	1,6	1,4	1,9	2,0	2,6	2,9

x – возраст детеныша гамадрила (в месяцах), y – вес (в кг).

11.

x	1	4	5	9	13	11	23	28
y	64	71	54	81	93	76	77	109

x – содержание фосфора в почве, y – содержание фосфора в злаковых растениях.

12.

x	50	55	60	52	65	60	50	55
y	4,0	4,2	4,1	4,2	4,5	4,3	4,1	4,4

x – живой вес овец, y – настриг.

13.

x	452	456	451	449	448	447	450	446
y	3207	3243	3236	3199	3136	3151	3172	3172

x – живой вес коров-первотелок, y – молочная продукция за стандартную лактацию.

14.

x	3,90	3,93	3,79	4,06	3,72	3,82	3,45	3,96
y	3,69	3,85	3,97	3,92	3,75	3,89	3,51	3,98

x – содержание жира в молоке коров-матерей, y – содержание жира в молоке коров-дочерей.

15.

x	4266	3676	5151	4217	4103	4401	6031	3696
y	3,96	3,89	3,75	3,83	4,10	3,85	3,64	3,95

x – удой, y – жирность молока.

16.

x	3,90	3,75	3,79	3,67	3,91	3,85	3,83	3,71
y	3,30	3,16	3,30	3,40	3,41	3,15	3,17	3,17

x – содержание жира в молоке, y – содержание белка в молоке.

17.

x	97	104	103	98	101	102	100	99
y	35	31	32	34	30	33	31	34

x – длина свиной туши (см), y – толщина шпика (мм).

18.

x	91	86	94	95	104	92	98	84

y	62	43	60	73	87	65	79	52

x – глубина груди теленка (см), y – живой вес (кг).

19.

x	83	72	69	90	93	95	97	91
y	56	42	18	84	56	107	90	68

x – вес петушков леггорнов 15-дневного возраста (г), y – вес гребня (мг).

20.

x	18	19	17	24	22	21	23	20
y	70	72	80	77	80	80	89	76

x – масса тела (кг), y – количество гемоглобина в крови (по Сали) у павианов-гамадрилов.

21.

x	66	61	67	73	51	59	48	47
y	38	31	36	43	29	33	28	25

x – длина головы (мм), y – длина грудного плавника (мм) у окуней.

22.

x	110	112	113	115	117	116	118	120
y	125	125	128	130	129	123	131	135

x – высота в холке (см), y – косая длина туловища (см) у коров-первотелок.

23.

x	0	2	6	8	10	14	16	20
y	32	29,2	23,3	19,9	17,2	11,3	7,8	2

x – расстояние от начала теплоизолированного тонкого стержня, y – температура в соответствующей точке стержня.

24.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	0	3	3	7	17	22	27	37

x – срок службы колеса вагона (в годах), y – усредненное значение износа по толщине обода колеса (в мм).

25.

x	7,0	7,5	8,0	8,5	9,0	9,5	10,0	10,5
y	0	7	6	8	10	12	15	17

x – стрела кривизны рельса (в см), y – количество дефектов рельса (в см на 25-метровый рельс).

26.

x	51	67	84	81	101	109	71	97
y	25	30	43	44	57	58	43	46

x – предел упругости стали при кручении (Н/мм^2), y – предел упругости при изгибе (Н/мм^2).

27.

x	57,8	54,6	54,8	51,7	61,1	62,3	52,2	49,2
y	17,2	17,9	18,8	19,9	16,0	17,8	18,8	19,3

x – содержание двуокиси кремния, y – содержание двуокиси алюминия в сланцевых породах.

28.

x	51	32	80	73	64	45	83	44
y	52,7	15,2	89,5	94,8	76	39,3	114,8	36,5

x – температура химической реакции (^{0}C), y – выход продукта (кг/час) на химическом производстве.

29.

x	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,9
y	0,8	0,75	0,65	0,7	0,6	0,7	0,55	0,5

x – отношение предела текучести стали к пределу прочности стали, y – процентное содержание углерода в стали.

30.

x	45	46	47	48	51	59	65	58
y	12	12	29	25	38	16	43	35

x – население (в десятках тысяч) в городах, y – количество подключенных сотовых телефонов (в десятках тысяч).

31.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	12	35	75	130	210	315	445	600

x – порядок системы линейных уравнений, y – продолжительность решения (мин).

П Р И Л О Ж Е Н И Е

Таблица 1

Значения случайных чисел

8574 4575 4999 7627 4315	9005 4518 3186 7982 1114	1894 7032 1426 4865 2339	3523 7293 1027 2229 0882	3393 9108 7891 9085 2638	5407 0469 7805 7294 5480	9659 7435 8928 7239 6189	5868 2574 6291 7866 3150
6987 0387 5581 6531 5735	9333 1998 1837 4216 3384	4247 2910 4731 6454 5146	2059 5626 8516 6476 5685	1313 3897 4380 1618 4858	1017 0858 8396 7813 2712	9391 0575 2414 4959 7675	7082 4977 0248 0228 7509
6092 1791 9746 0118 0986	1047 1900 1508 4493 3203	8196 0649 8704 2560 3476	0206 0517 6493 1798 8965	5354 0905 1420 3218 9697	7141 2418 5230 3517 0319	7078 2220 7110 9851 6272	0361 9142 1995 3834 5697
8057 5161 2961 1494 8153	1656 6171 3698 0692 2484	1515 9125 1913 2594 0961	4534 5460 9197 6917 1558	0912 4636 2515 5964 7848	7526 5172 2023 3632 0761	0460 9737 3619 0602 3853	9908 3621 7302 6722 8582
0703 6928 6961 2030 3503	9602 6521 3678 1683 2614	0190 8548 1935 7322 2532	1810 2737 8762 6906 4940	5192 8438 8166 6158 6061	7016 8805 2064 4213 0806	8483 6029 8760 2720 1913	7998 9199 6554 0777 3769

Литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление (т. 1-2). – М.: Наука, 1978.

2. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991.

3. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1997.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука. 1974.

5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.

6. Сборник задач по математике (Ч. 1-2)/ Под ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1986.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. 1-2. – М.: Высш.шк., 1986.

8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1977.

9. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.

10. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.

11. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980.

12. Хемминг Р.В. Численные методы. – М.: Наука, 1968.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОГРЕШНОСТЕЙ И ПРАВИЛА ДЕЙСТВИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

§1. Точные и приближенные значения величин ……. 3

§2. Абсолютная погрешность…… 5

§3. Относительная погрешность……7

§4. Число верных десятичных знаков……... 9

§5. Погрешность арифметических действий…….. 11

§6. Арифметические действия с приближенными числами……. 16

§7. Основные задачи теории погрешностей…… 31

ГЛАВА 2. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§1. Постановка задачи…… 42

§2. Отделение корней……. 45

§3. Метод половинного деления (бисекции)…… 47

§4. Метод хорд…… 50

§5. Метод касательных (Ньютона)…… 52

§6. Комбинированный метод……. 56

§7. Метод итерации…… 58

ГЛАВА 3. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

§1. Постановка задачи…… 69

§2. Интерполяционная формула Лагранжа……. 71

§3. Интерполяционная формула Ньютона…….. 76

§4. Уплотнение таблиц функций……86
§5. Интерполяция сплайнами…….89
§6. Численное дифференцирование…….. 93
§7. Многочлены Бернштейна……. 98
§8. Интерполяция по Чебышеву…… 99
ГЛАВА 4. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ
§1. Постановка задачи численного интегрирования……118
§2. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса……...119
§3.Формула прямоугольников……121
§4. Формула трапеций……. 124
§5. Формула Симпсона…… 126
§6. Вычисление интегралов методом Монте-Карло…… 133
ГЛАВА 5. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
§1. Постановка задачи…….146
§2. Представление решения задачи Коши в виде степенного ряда…….149
§3. Метод Пикара……153
§4. Метод Эйлера……157
§5. Метод Рунге-Кутта…….. 160
§6. Метод Милна…… 167
§7. Метод Адамса……170
§8. Решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений……...178

ГЛАВА 6. ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУРЬЕ……..194
ГЛАВА 7. МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
§1. Метод наименьших квадратов……..202
§2. Нахождение приближающей функции в виде линейной функции и квадратного трехчлена (линейная и квадратичная регрессия)…….207
§3. Нахождение приближающей функции в виде других элементарных функций……211
ГЛАВА 8. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
§1. Системы линейных алгебраических уравнений….221
§2. Частные случаи систем……..226
§3. Метод Гаусса……..230
§4. Метод простой итерации……...234
§5. Метод Зейделя……240
§6. Понятие об обусловленности системы…….243
ЗАДАЧИ……250
ПРИЛОЖЕНИЯ……..269

ДЕМЕНТЬЕВ Александр Дмитриевич

ГРУНИНА Мария Викторовна

БАБИН Владислав Николаевич

ШЕФЕЛЬ Валентина Гавриловна

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Допущено Министерством сельского хозяйства Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших сельскохозяйственных учебных заведений по агроинженерным и агроэкономическим специальностям

Редактор Н.К.КРУПИНА

Лицензия № 020426 от 7 мая 1997 г.

Подписано к печати 2003 г. Формат 60 x 84 / 16
Объем печ.л. Тираж 200 экз. Заказ № Цена договорная.

Редакционно-полиграфическое объединение СО РАСХИ,
ротапринт. 630500, Новосибирская область, п.Краснообск